

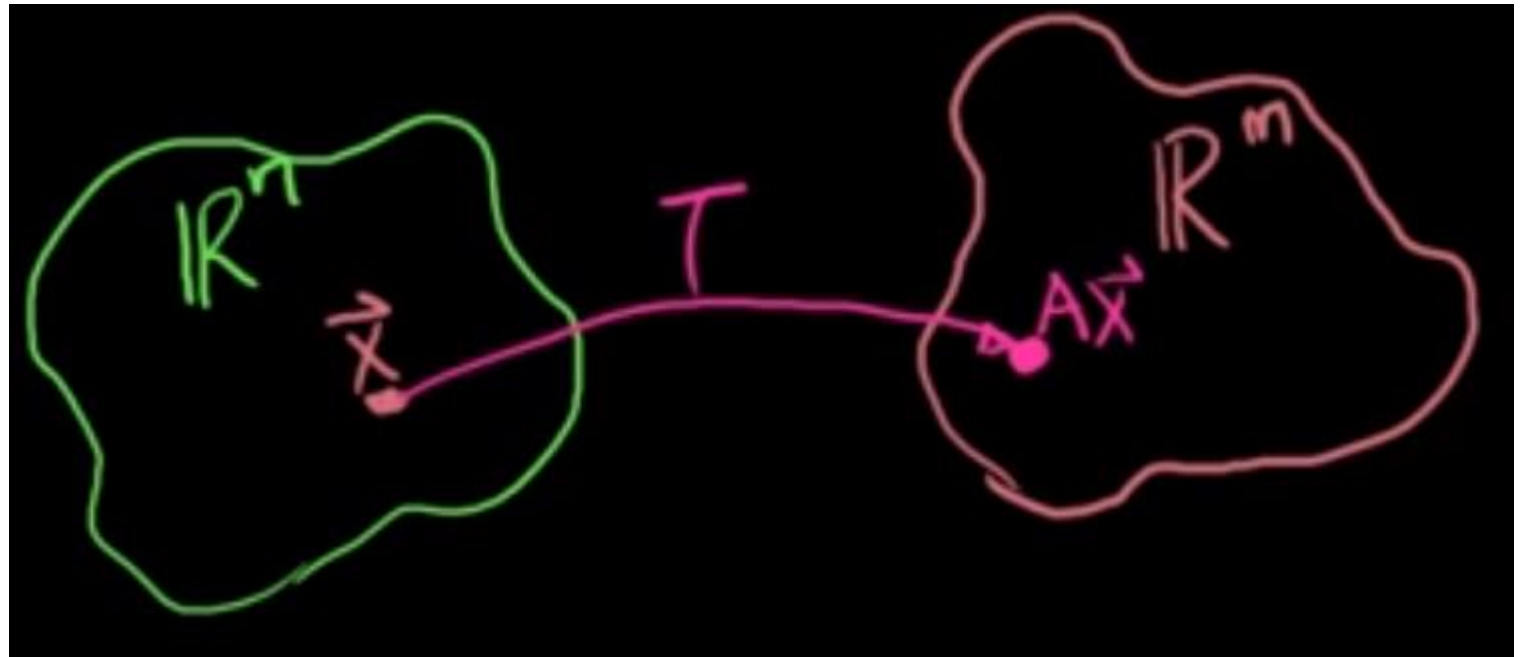
GRK 2

dr Wojciech Palubicki

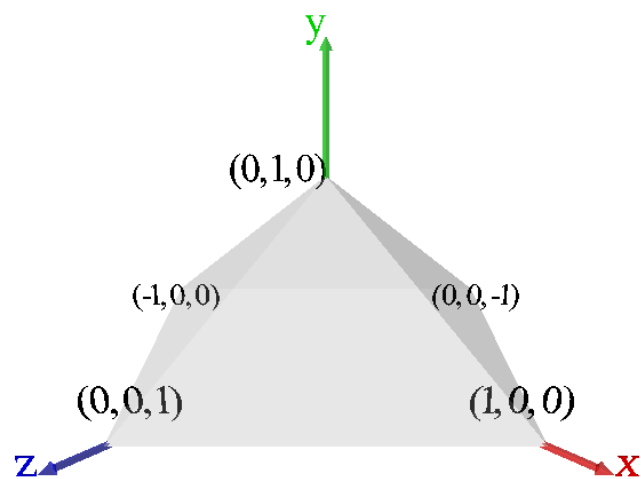
Macierz wektor produkt jako Transformacja

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

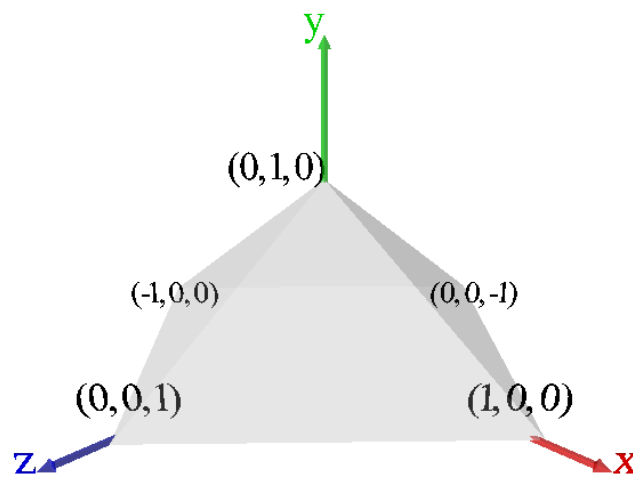
$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$



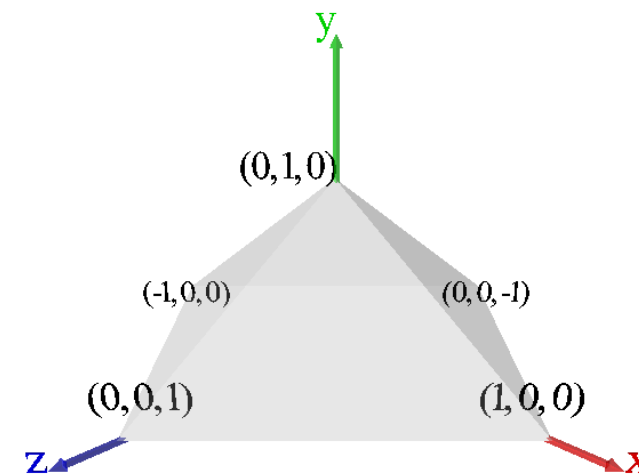
Przemieszczanie wierzchołków - Transformacje



Skalowanie

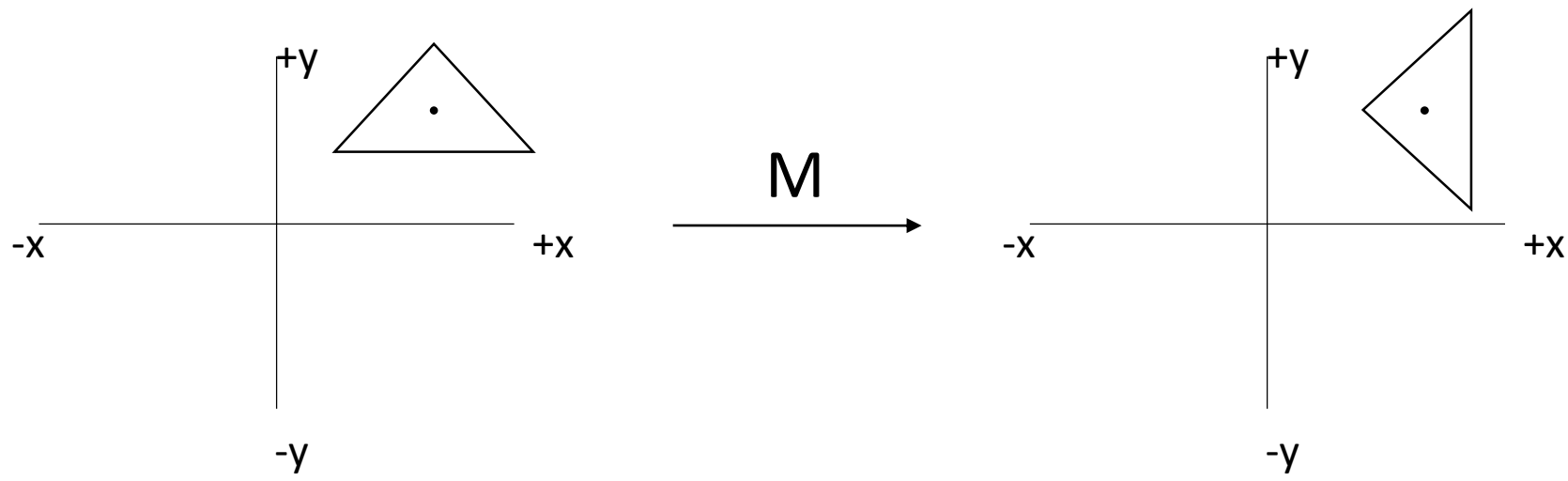


Rotacja



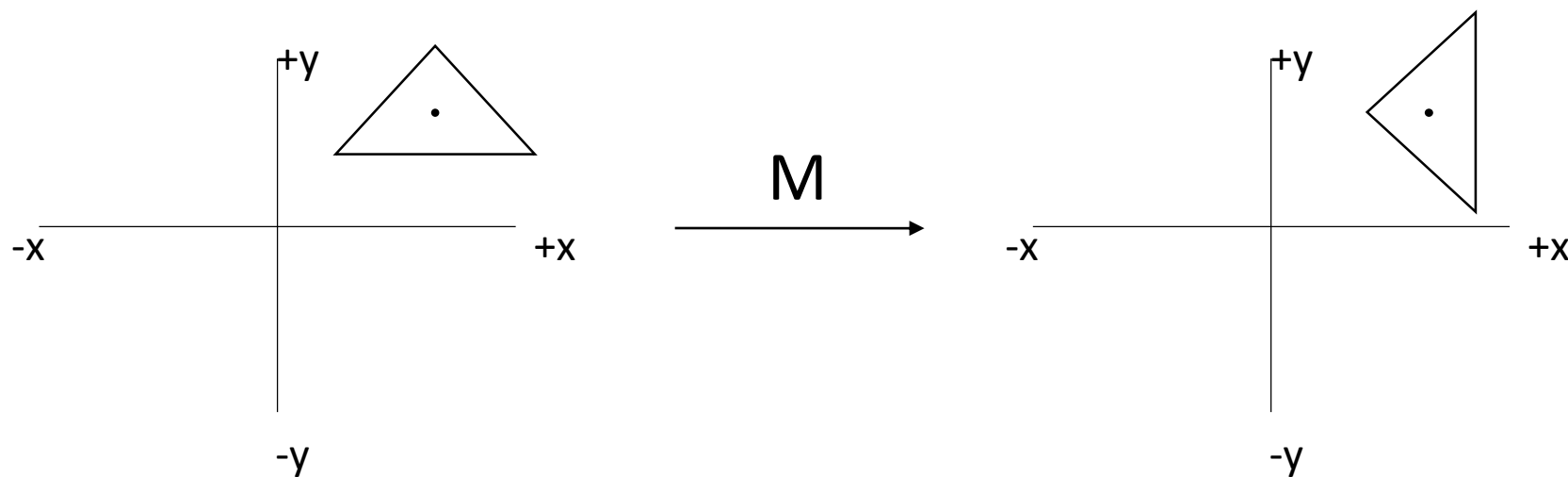
Translacja

Macierz rotacji M wobec punktu $P_o(x_o, y_o)$



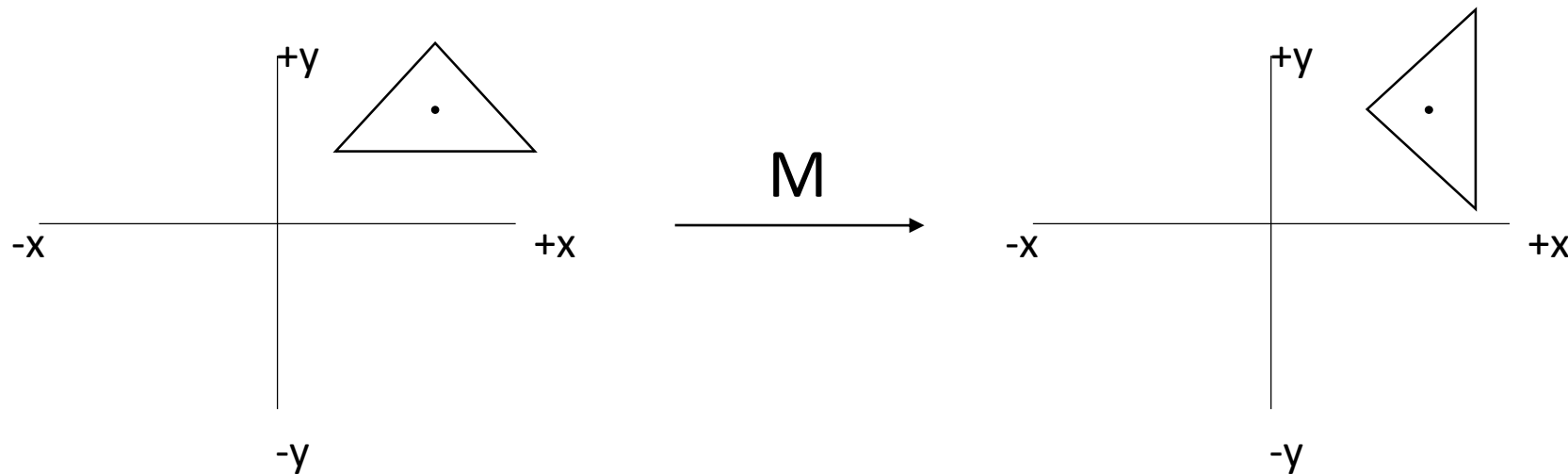
Macierz rotacji M wobec punktu $P_o(x_o, y_o)$

1. Translacja to początku: $T(-x_o, -y_o)$



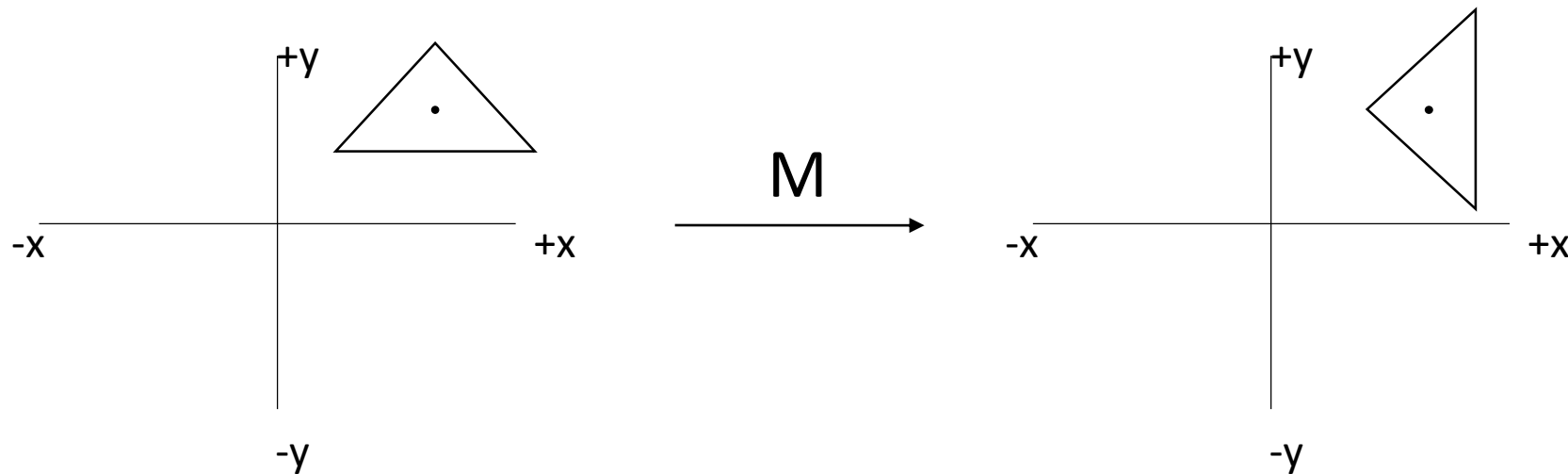
Macierz rotacji M wobec punktu $P_o(x_o, y_o)$

1. Translacja to początku: $T(-x_o, -y_o)$
2. Rotacja o kat θ : $R(\theta)$



Macierz rotacji M wobec punktu $P_0(x_0, y_0)$

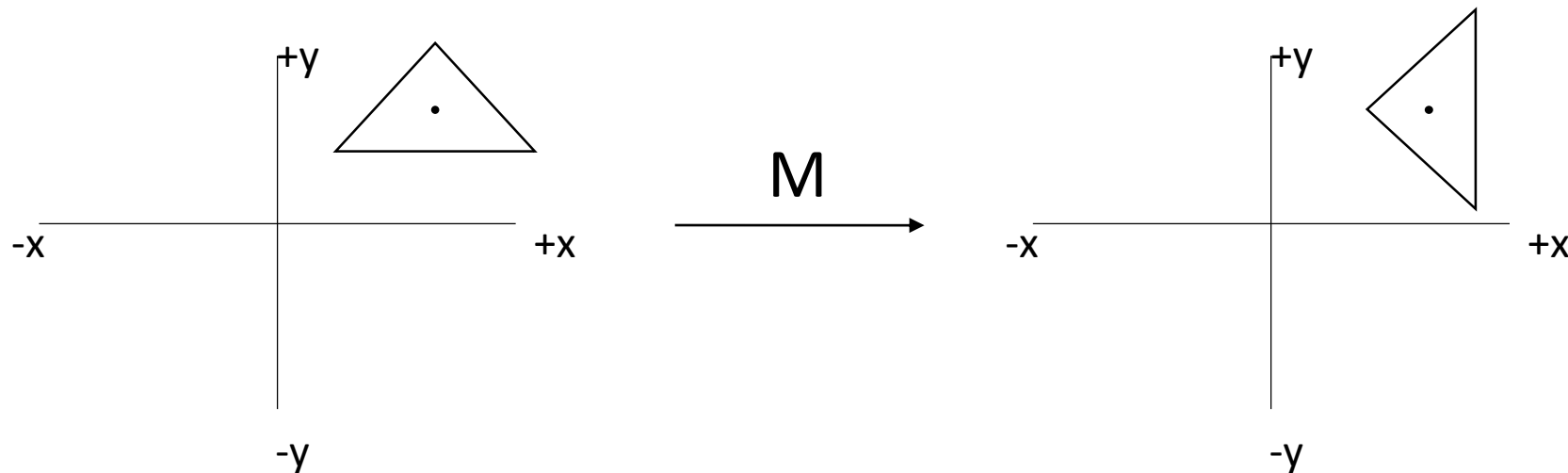
1. Translacja to początku: $T(-x_0, -y_0)$
2. Rotacja o kat θ : $R(\theta)$
3. Translacja do punktu P_0 : $T(x_0, y_0)$



Macierz rotacji M wobec punktu $P_0(x_0, y_0)$

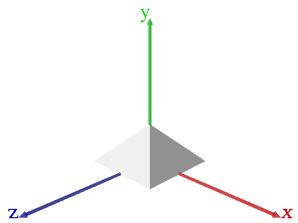
1. Translacja to początku: $T(-x_0, -y_0)$
2. Rotacja o kat θ : $R(\theta)$
3. Translacja do punktu P_0 : $T(x_0, y_0)$

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(x_0, y_0) \mathbf{R}(\theta) \mathbf{T}(-x_0, -y_0)$$



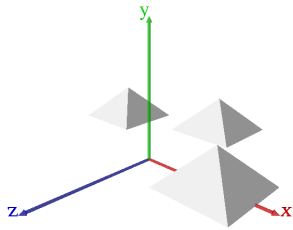
Uproszczony Potok Graficzny (Rendering)

Model Matrix



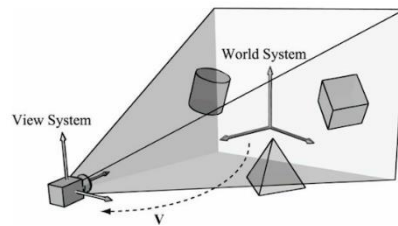
Object Space

View Matrix



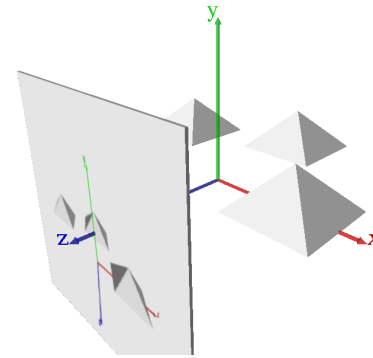
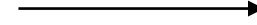
World Space

Projection Matrix

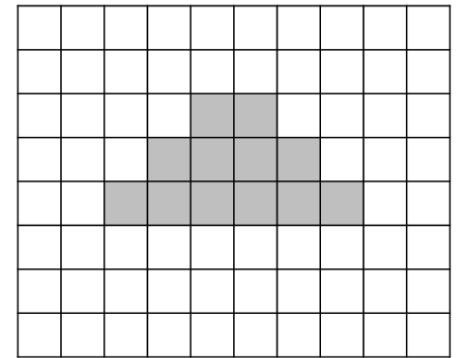


View Space

Viewport Transform

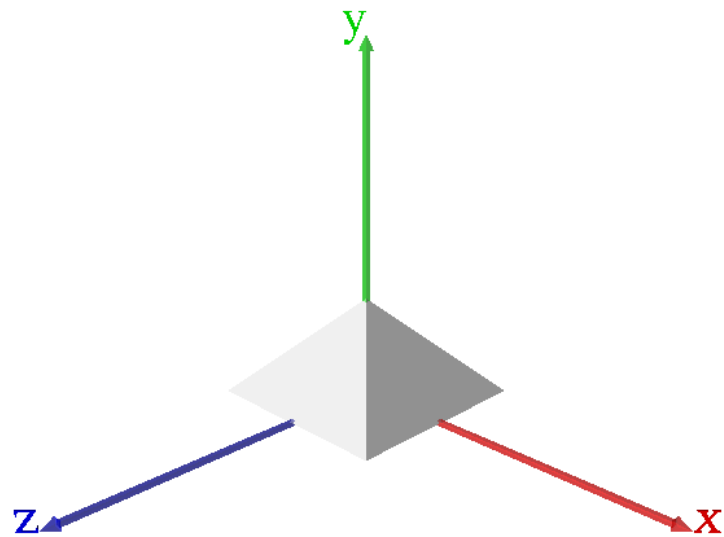


Clip Space

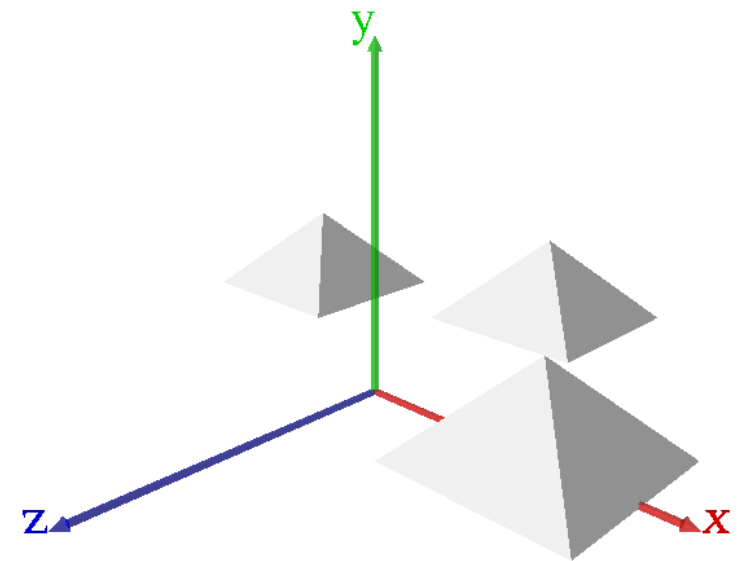


Screen Space

World space transformation

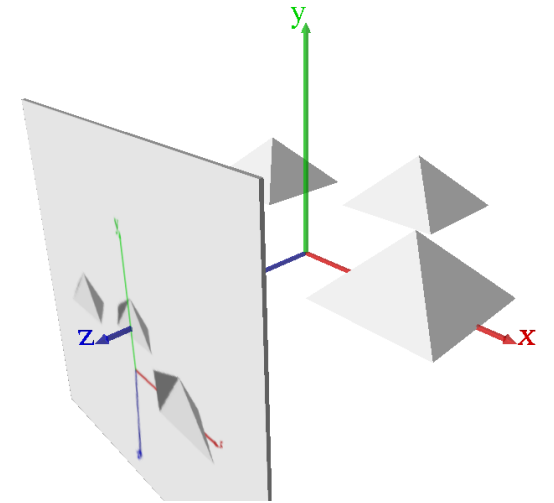
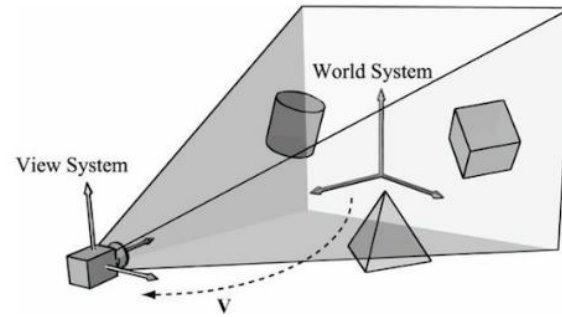
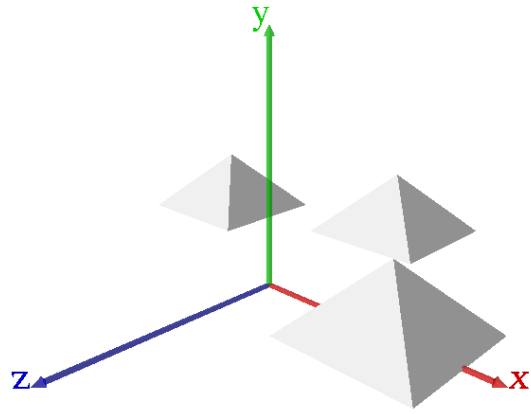


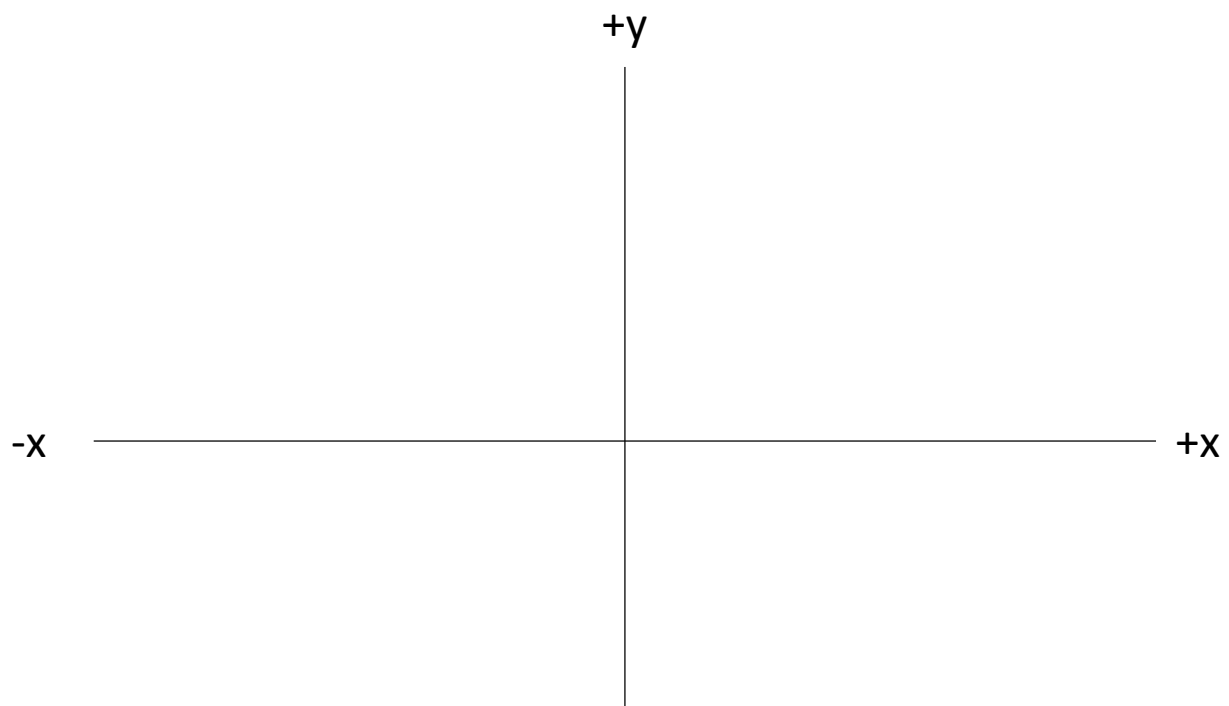
Object Space

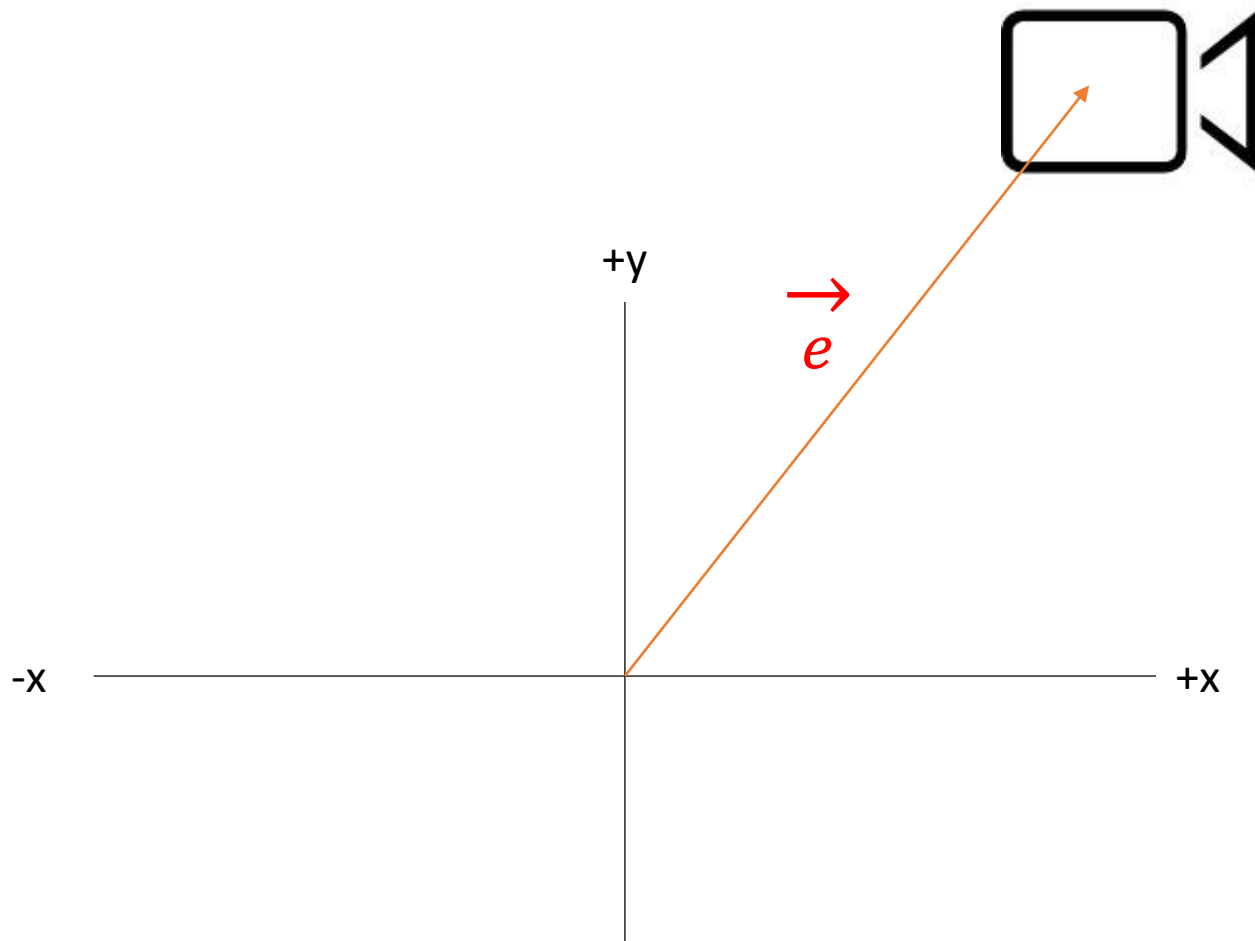


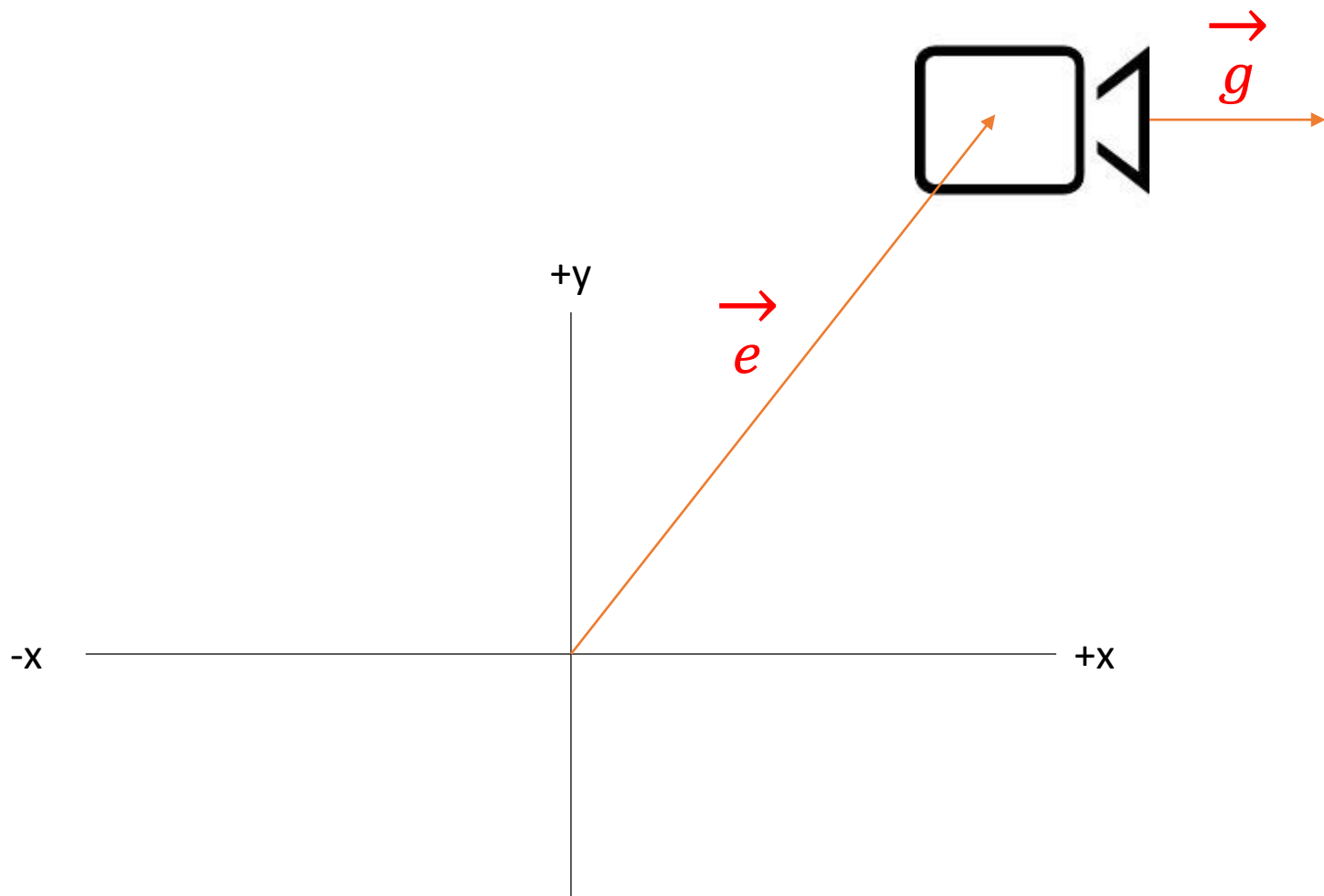
World Space

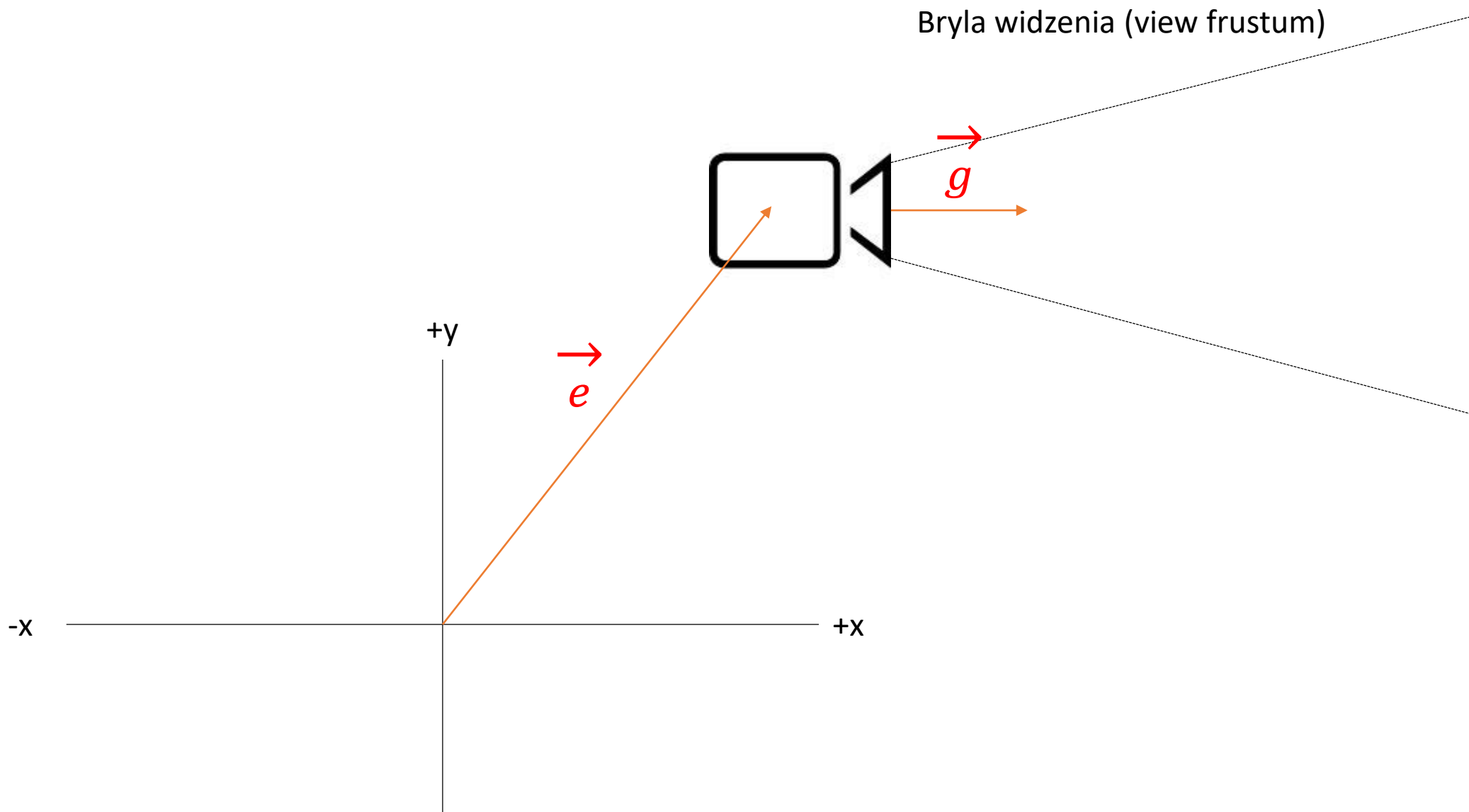
World space $\rightarrow$ 2D

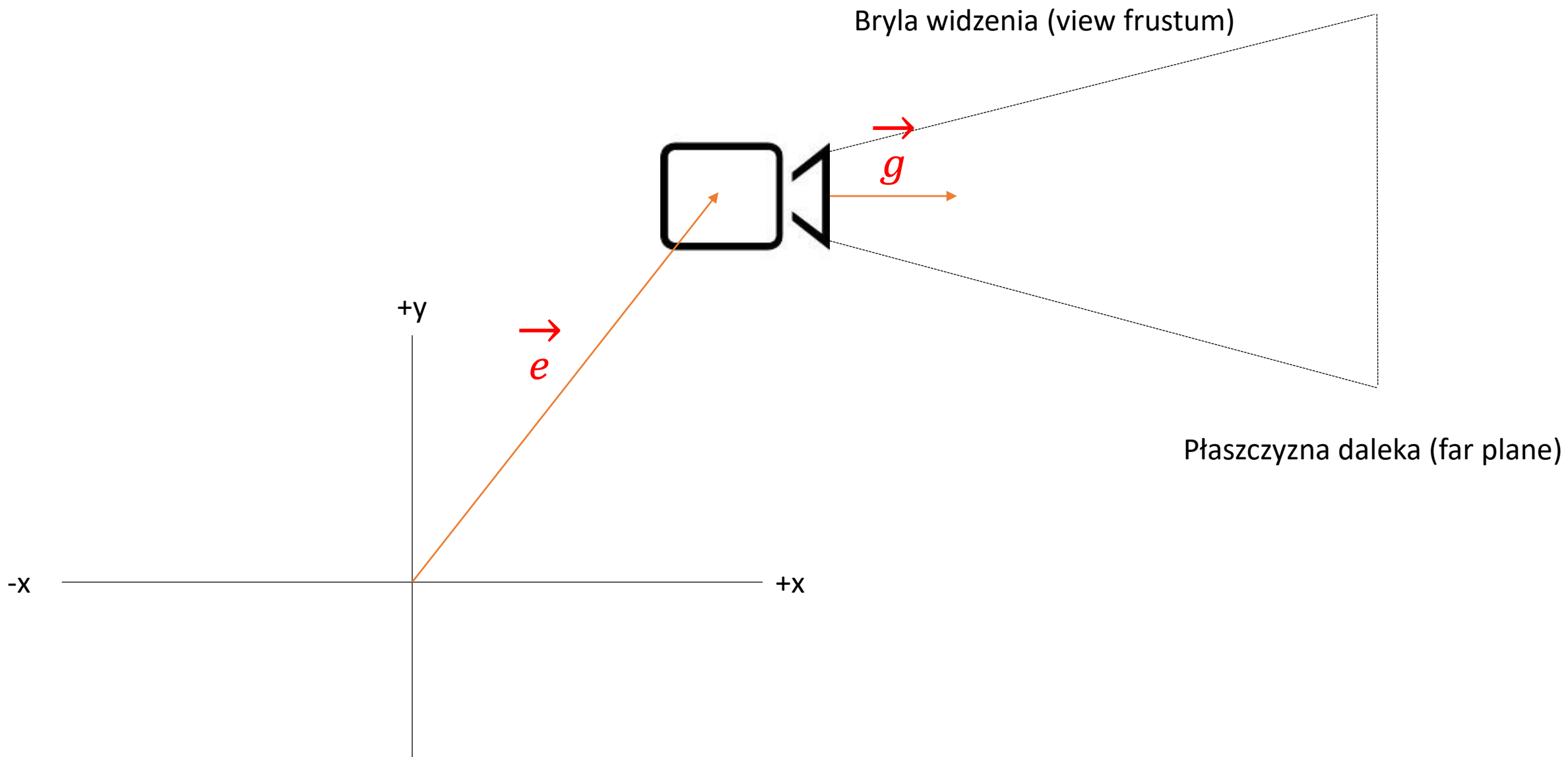


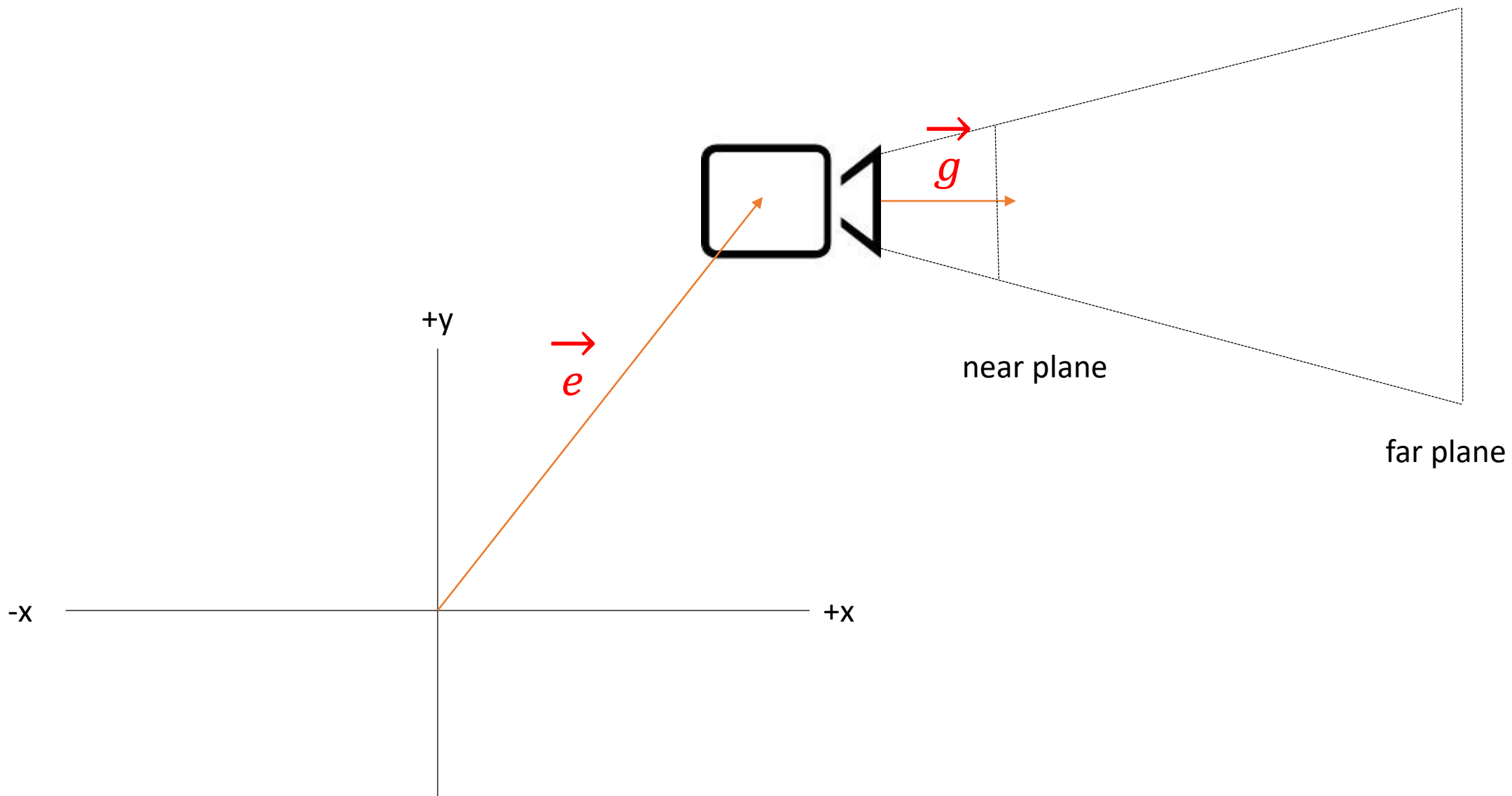


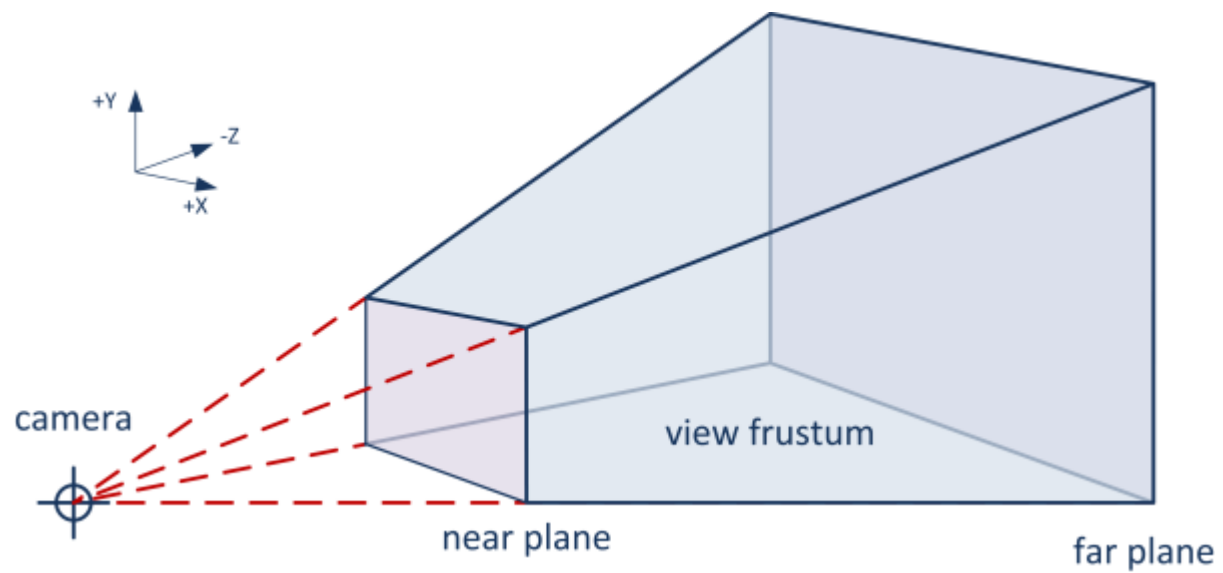


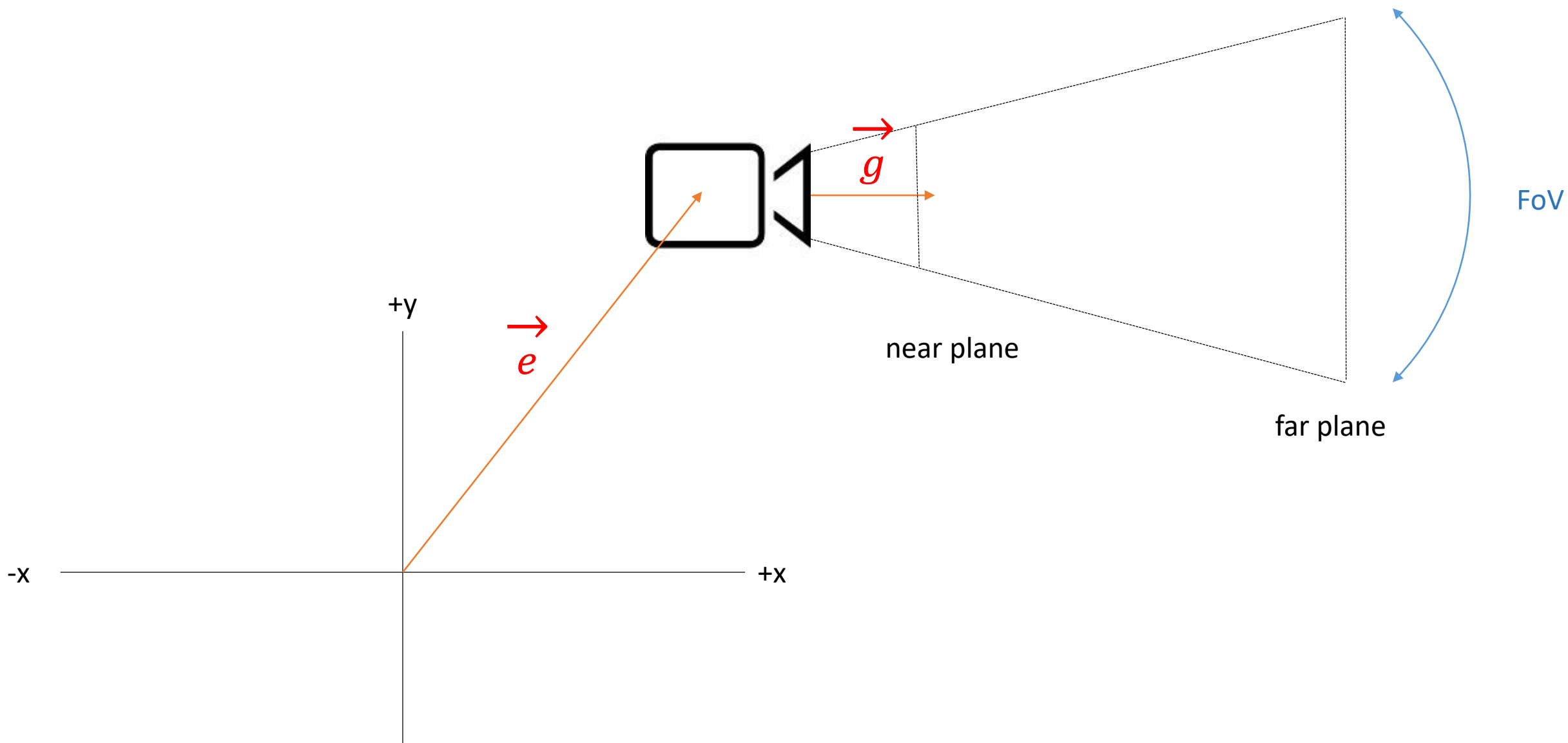




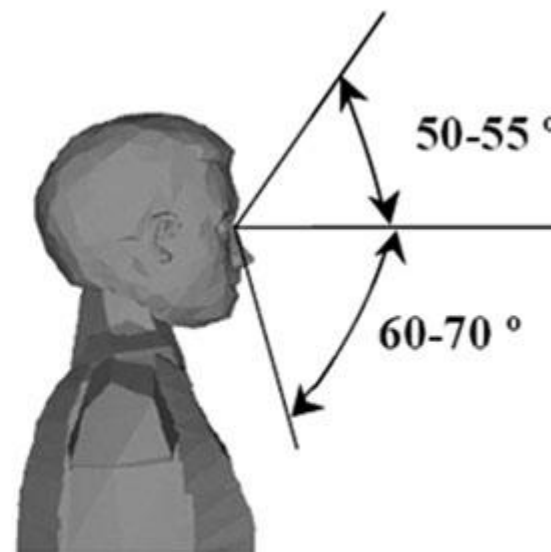
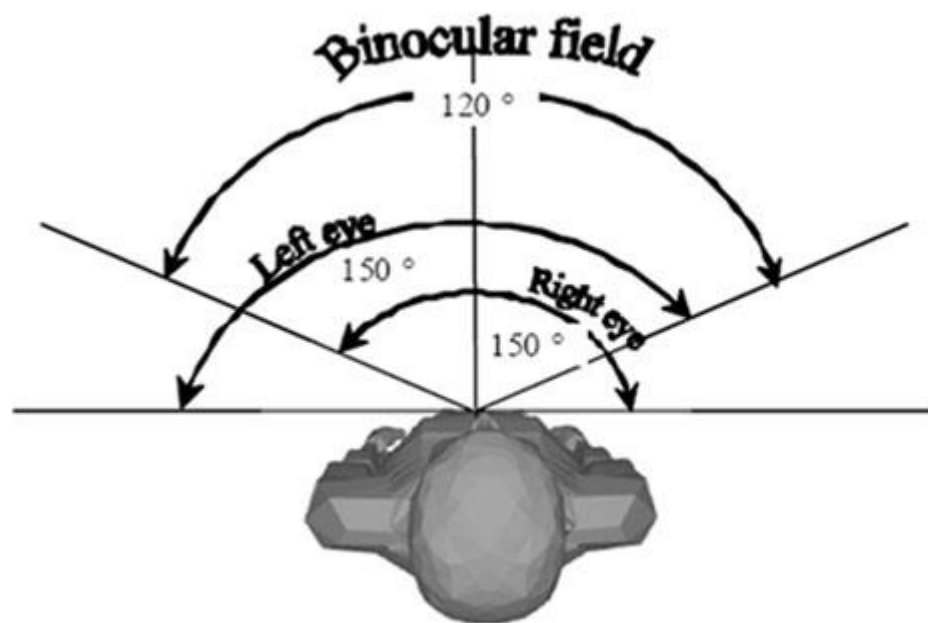




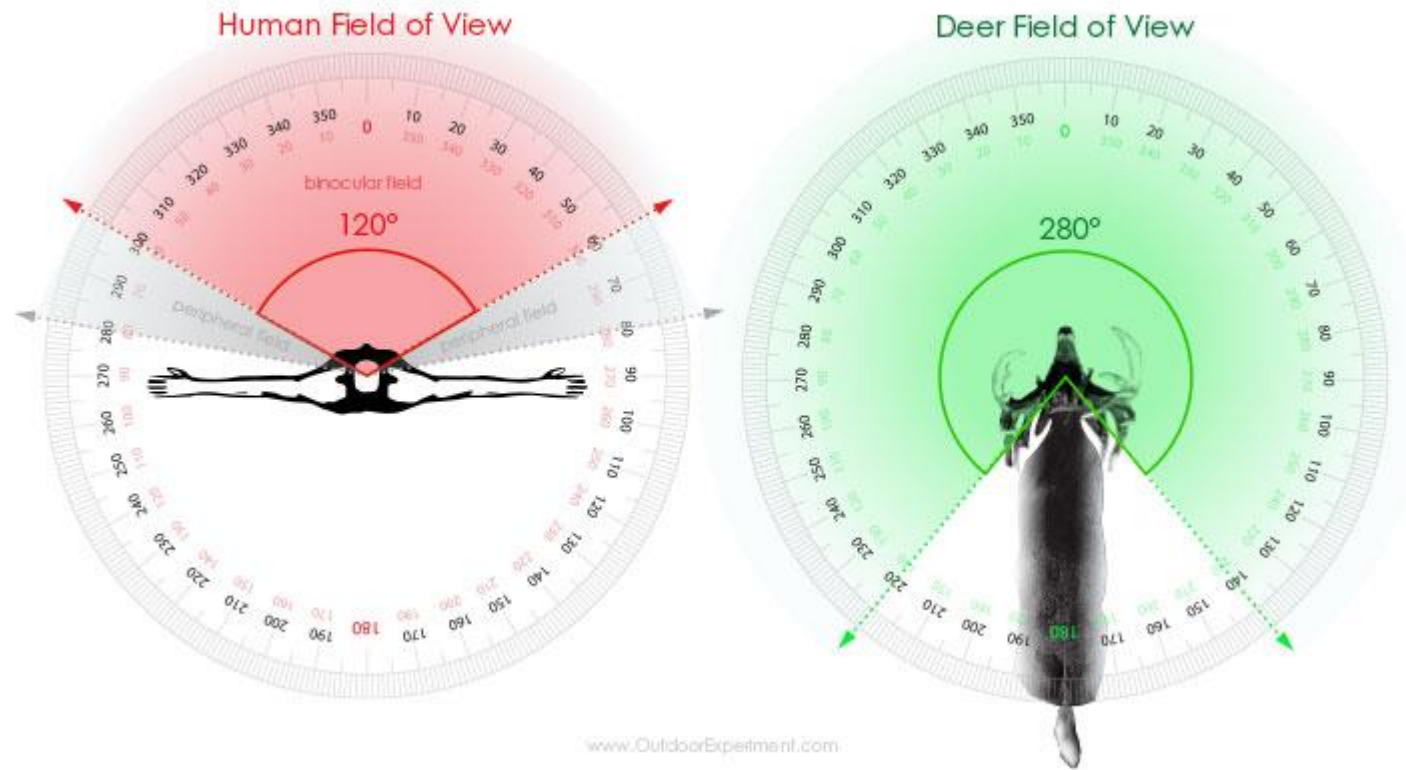




Pole widzenia (Field of View - FoV)

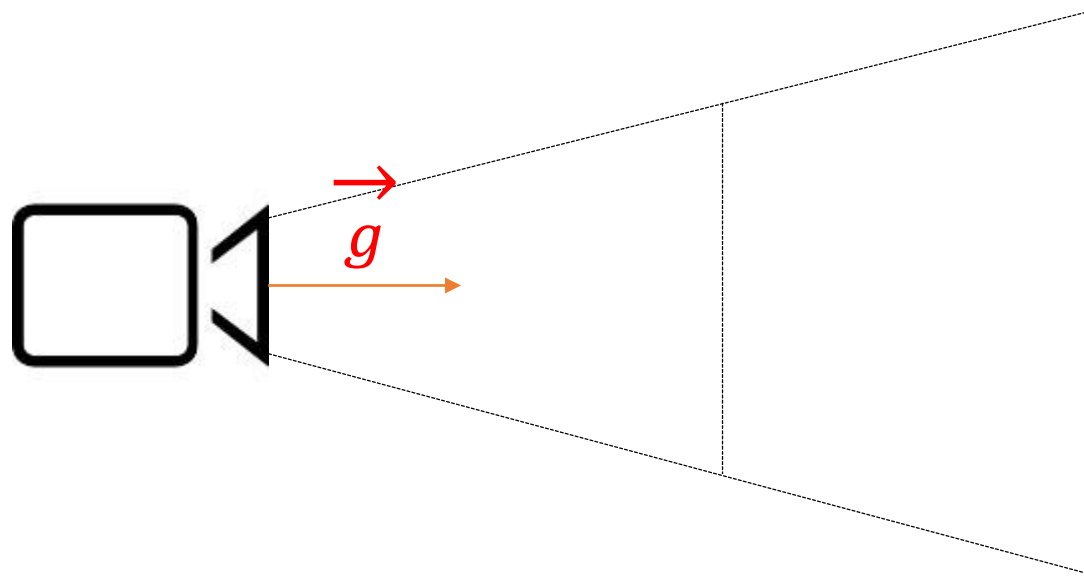


Pole widzenia (Field of View - FoV)



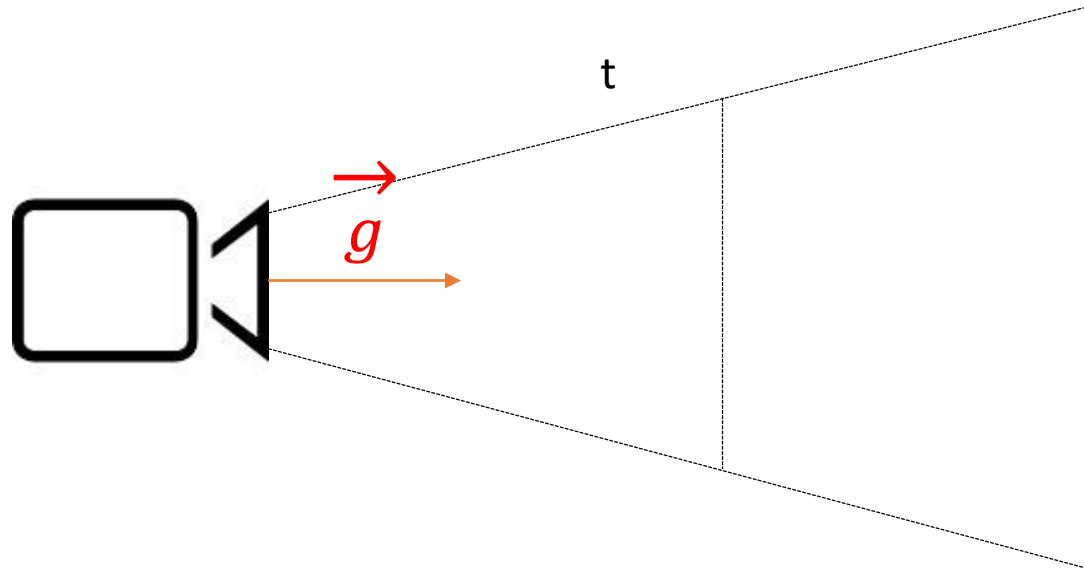
Transformacja kamery

- Bryła widzenia:



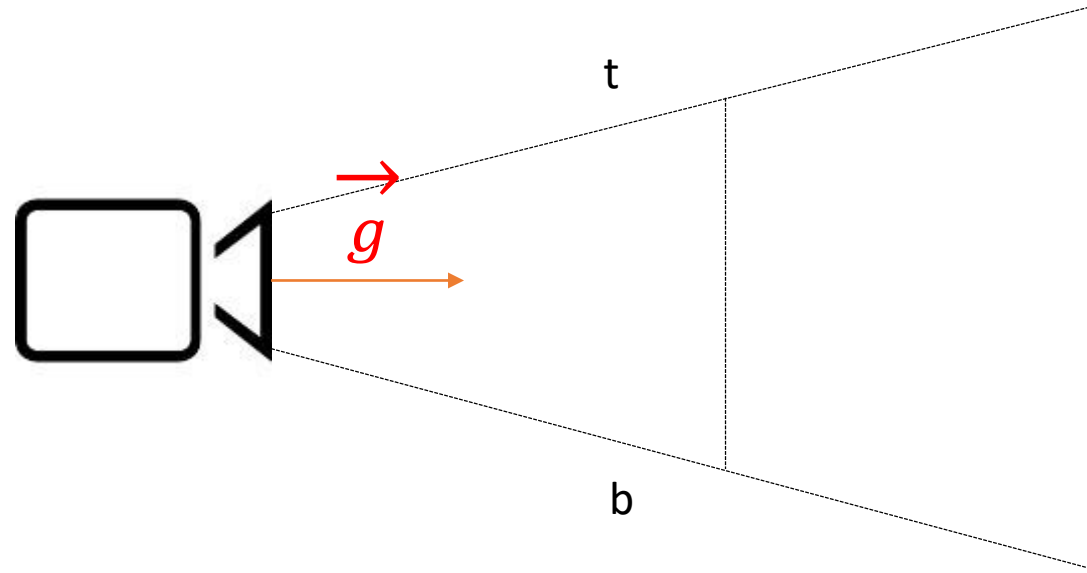
Transformacja kamery

- Bryła widzenia:
 - górna płaszczyzna t



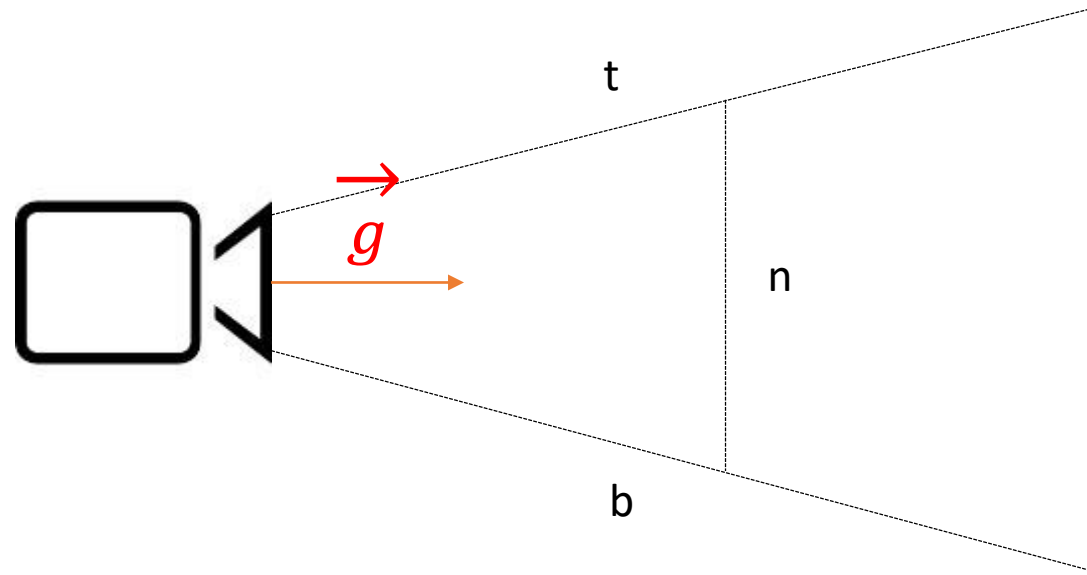
Transformacja kamery

- Bryła widzenia:
 - górna płaszczyzna t
 - dolna płaszczyzna b



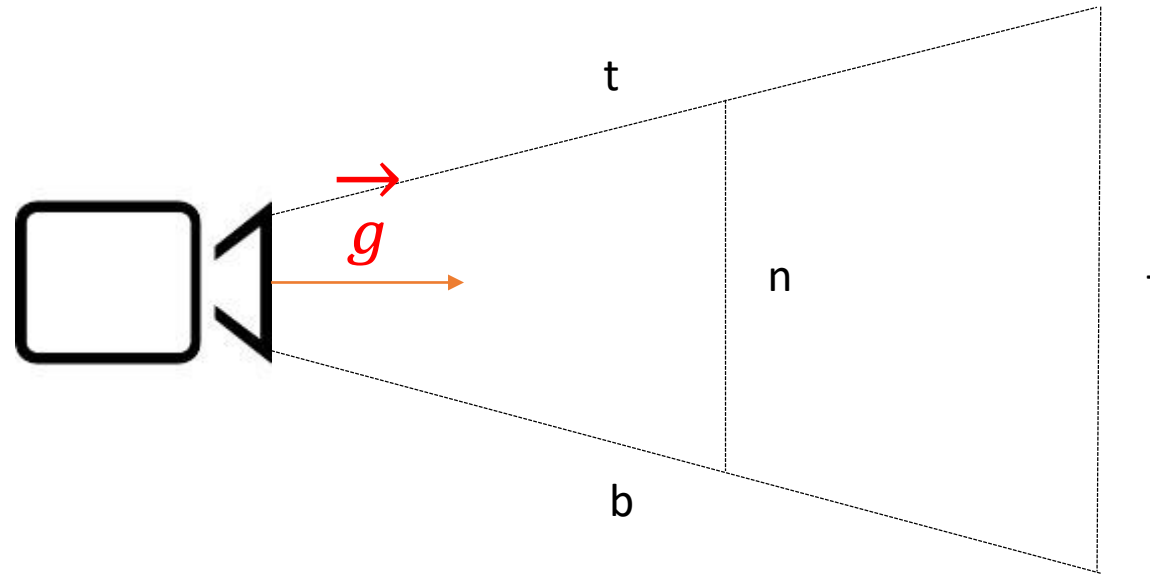
Transformacja kamery

- Bryła widzenia:
 - górna płaszczyzna t
 - dolna płaszczyzna b
 - bliska płaszczyzna n



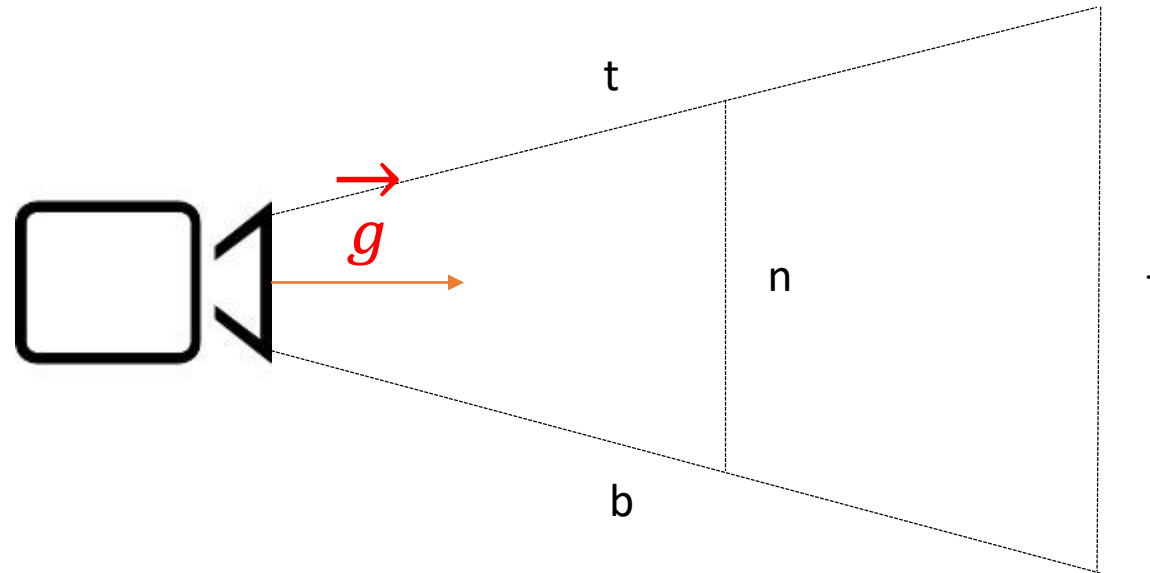
Transformacja kamery

- Bryła widzenia:
 - górna płaszczyzna t
 - dolna płaszczyzna b
 - bliska płaszczyzna n
 - daleka płaszczyzna f

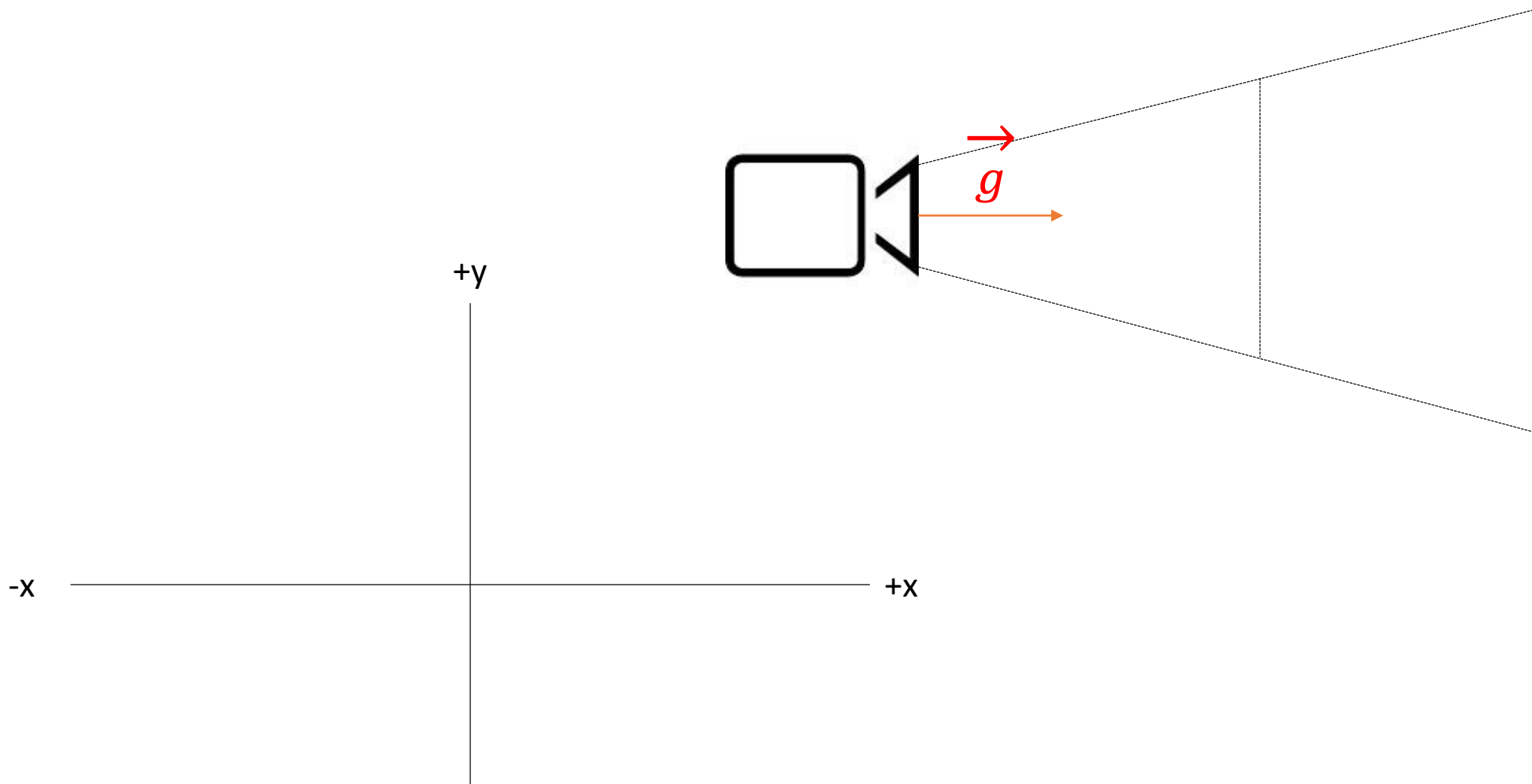


Transformacja kamery

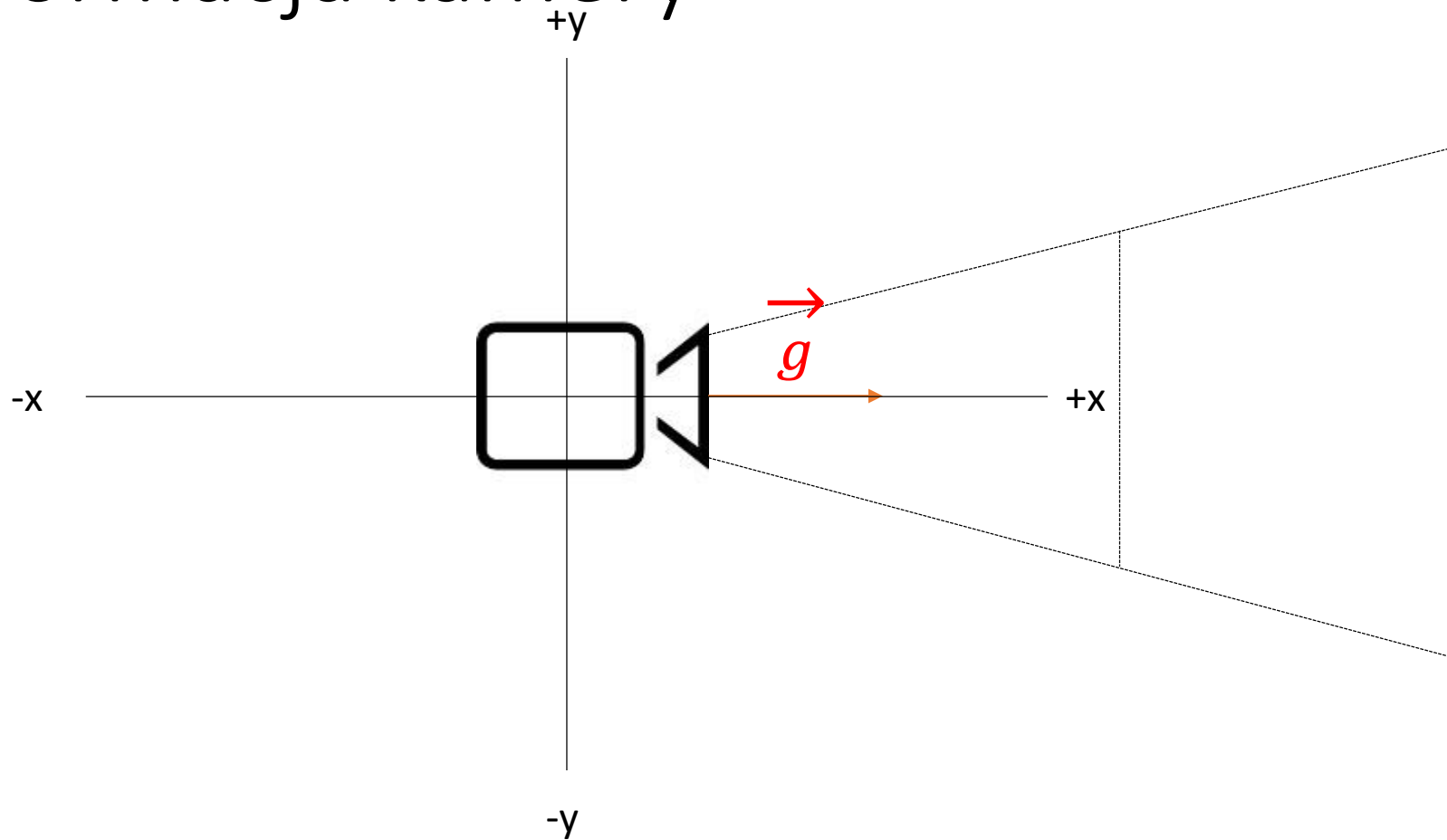
- Bryła widzenia:
 - górna płaszczyzna t
 - dolna płaszczyzna b
 - bliska płaszczyzna n
 - daleka płaszczyzna f
 - lewa płaszczyzna l
 - prawa płaszczyzna r



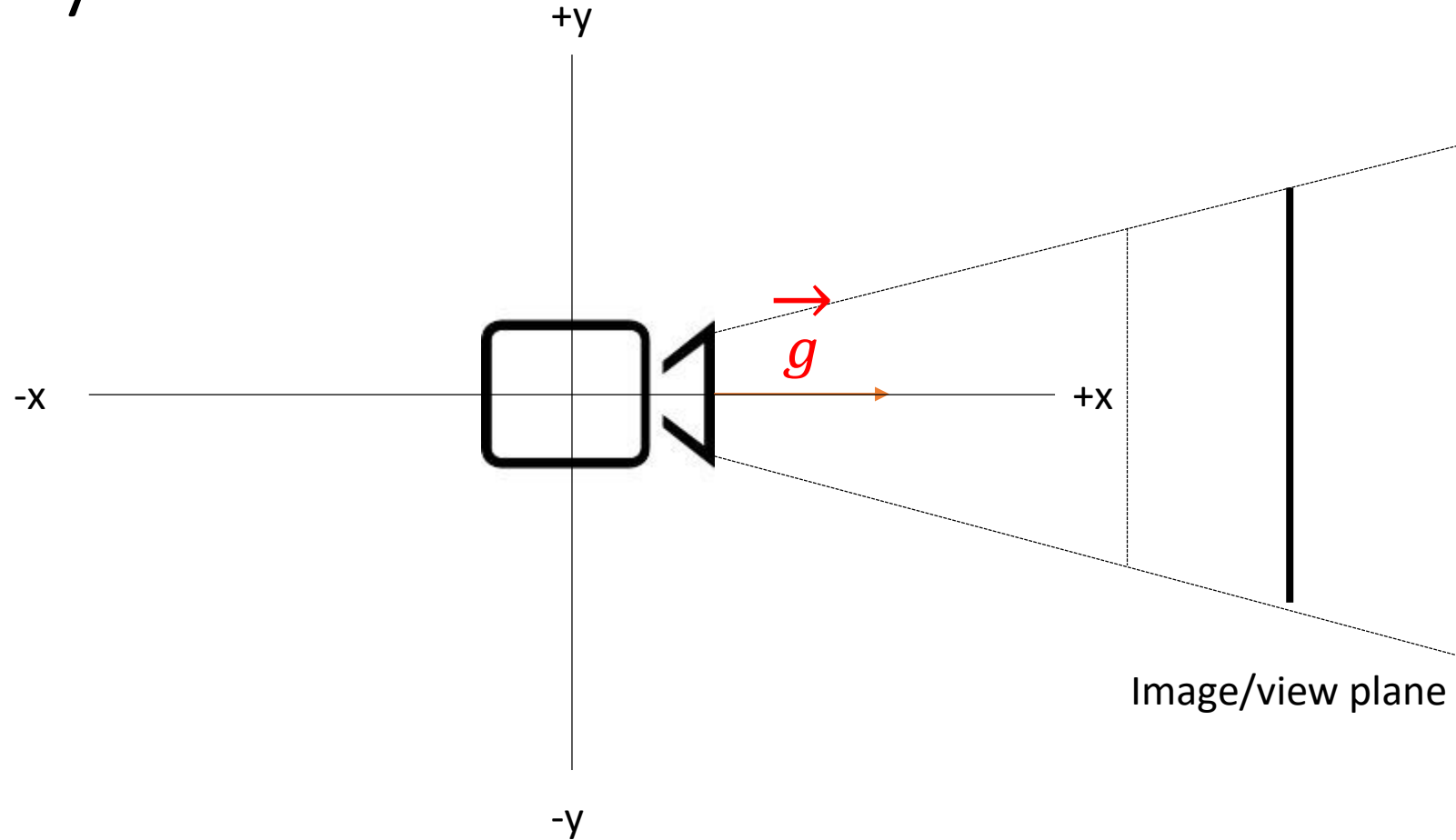
Transformacja kamery



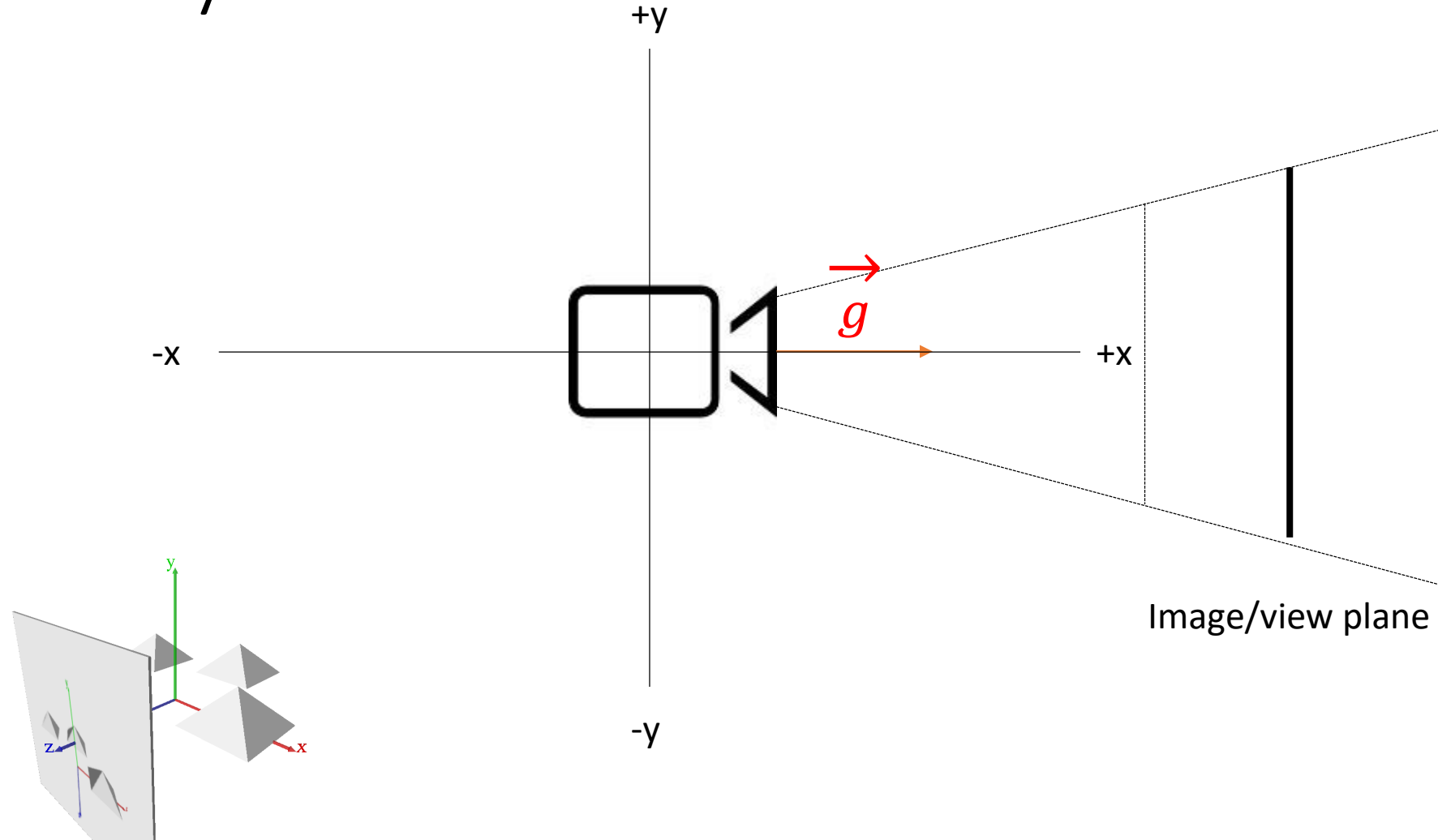
Transformacja kamery



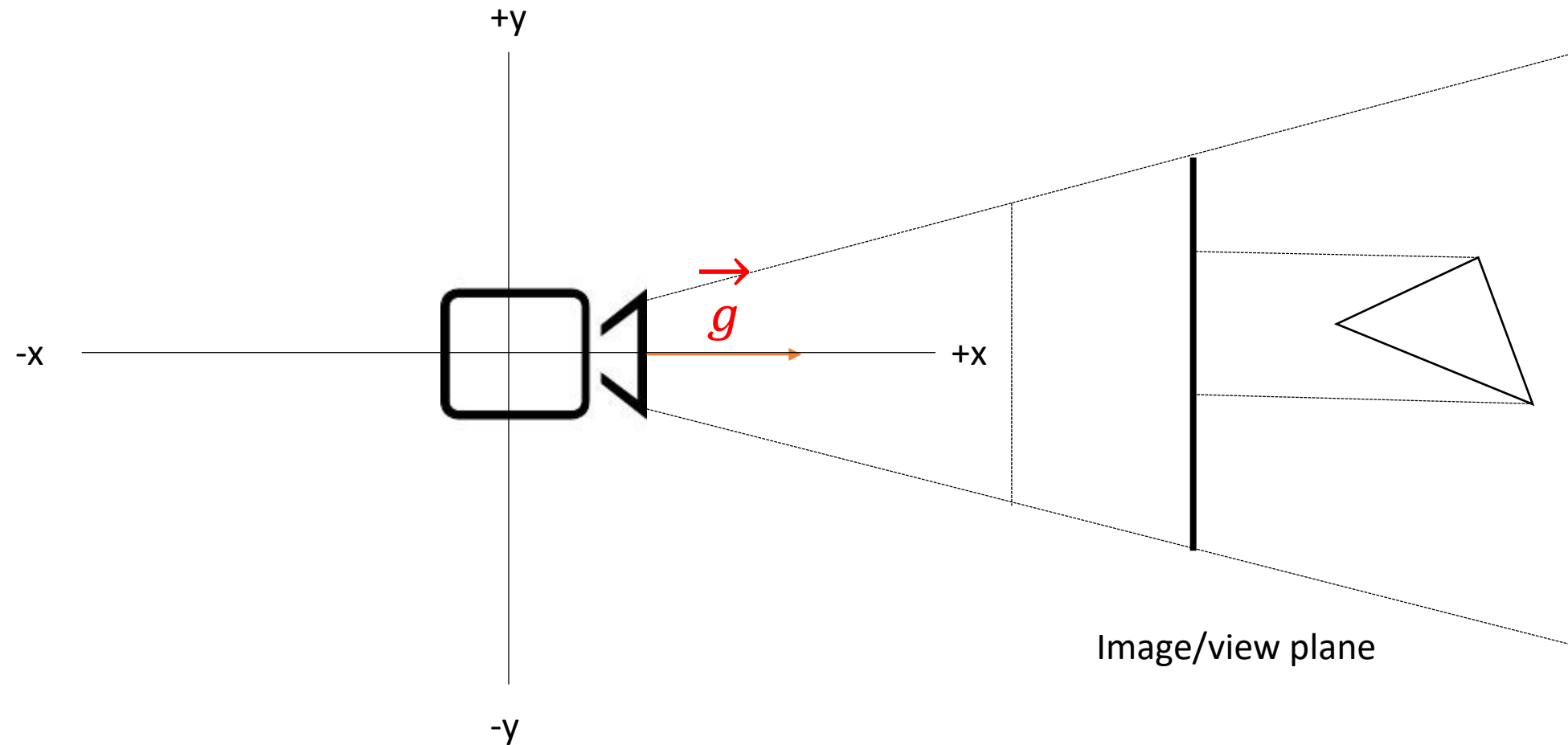
Płaszczyzna rzutowania



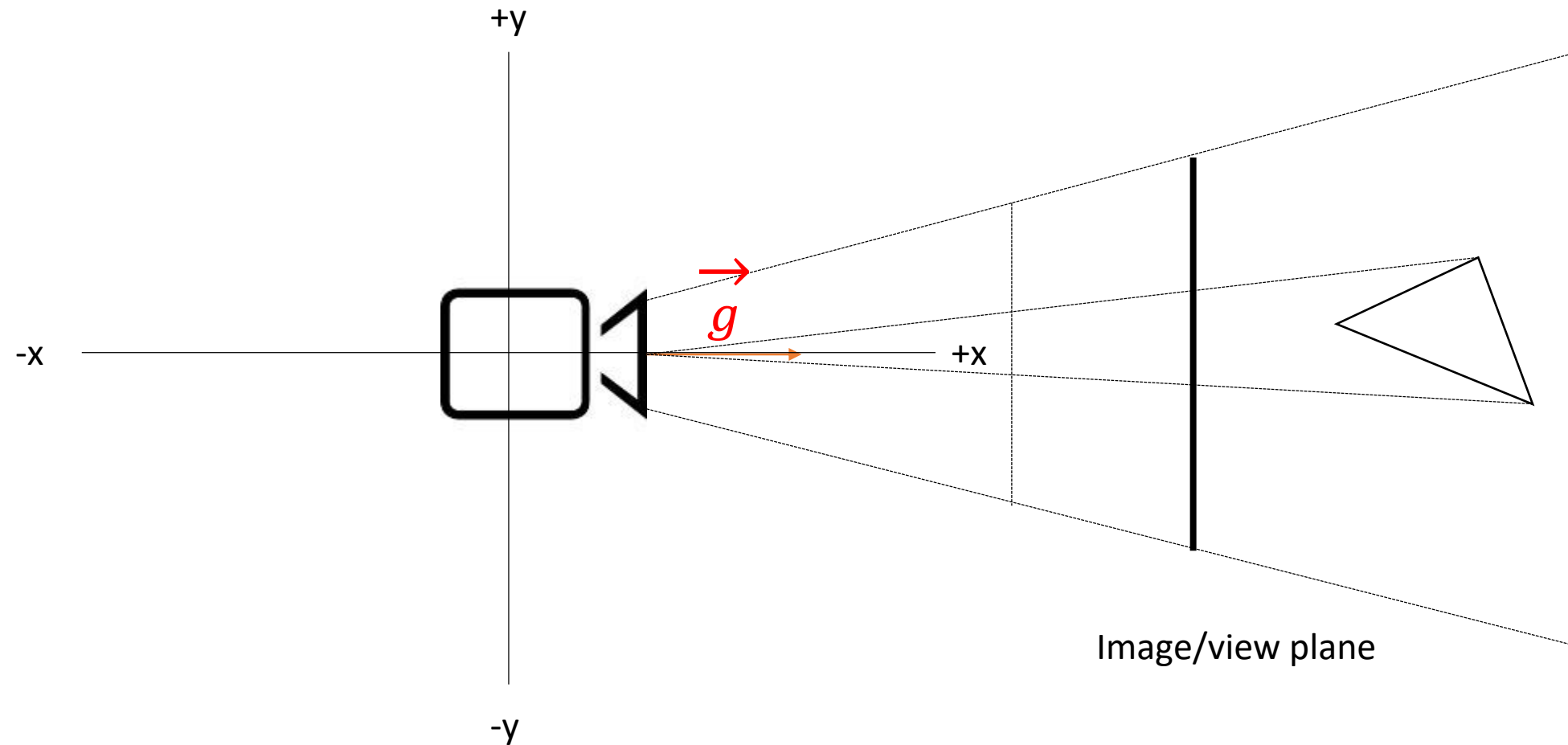
Płaszczyzna rzutowania



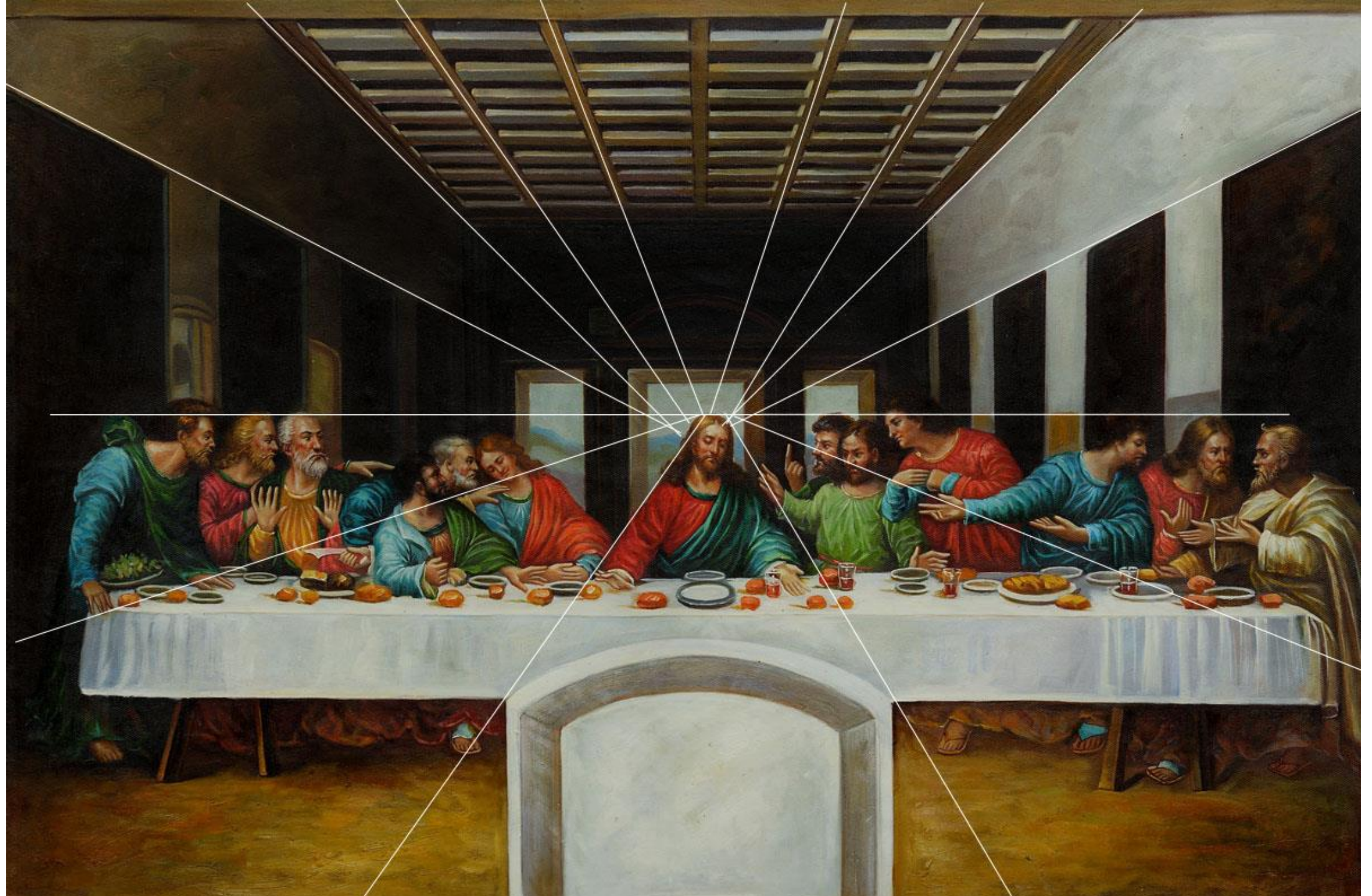
Rzutowanie równoległe



Rzutowanie perspektywiczne



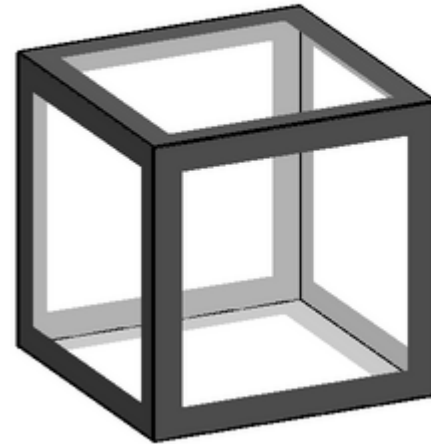




Rzutowania

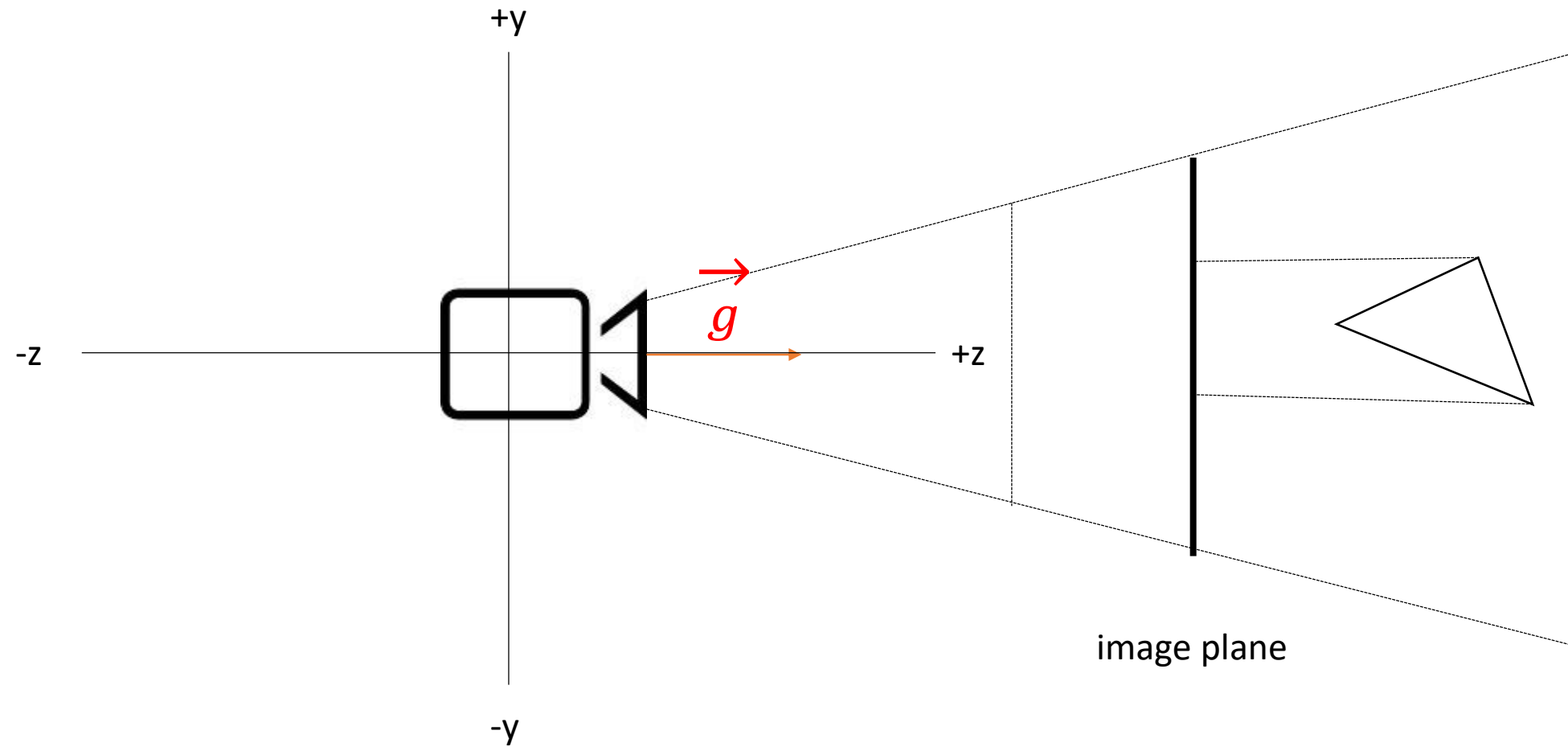


Perspektywicznie rzutowanie

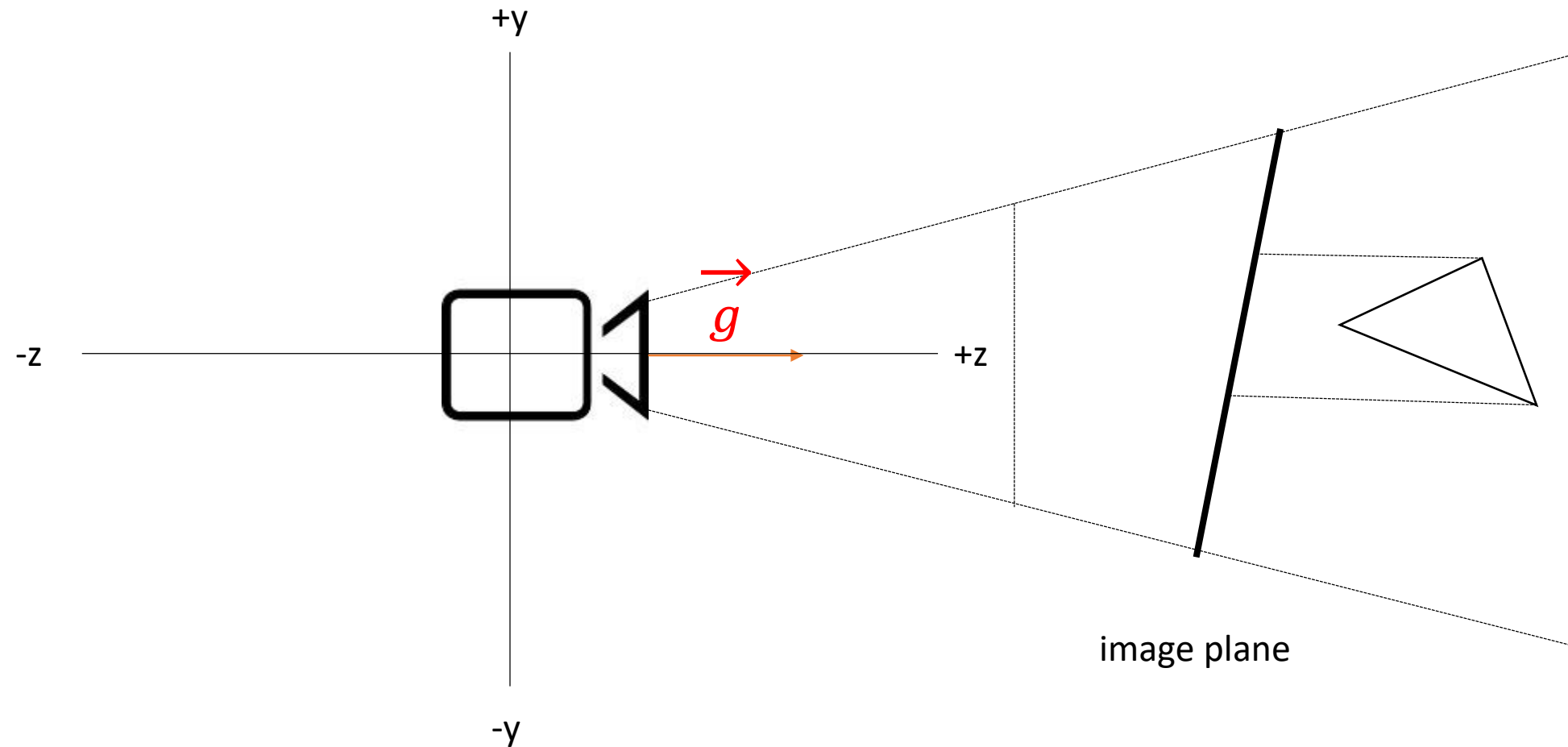


Ortograficznie rzutowanie

Rzutowanie ortograficzne

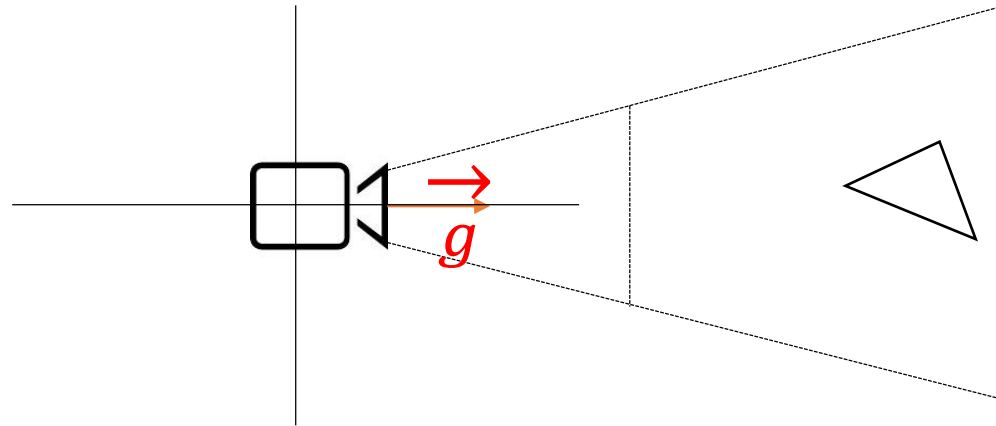


Rzutowanie **nie**-ortograficzne

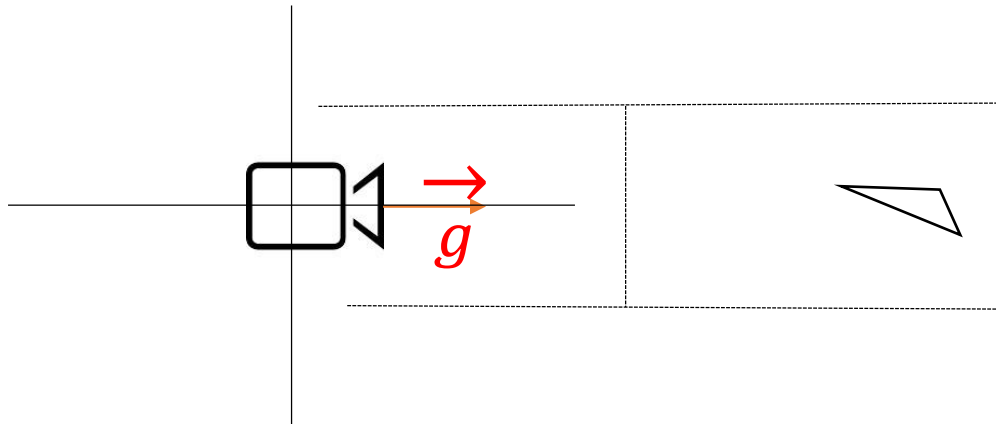


Rzutowanie ortograficzne

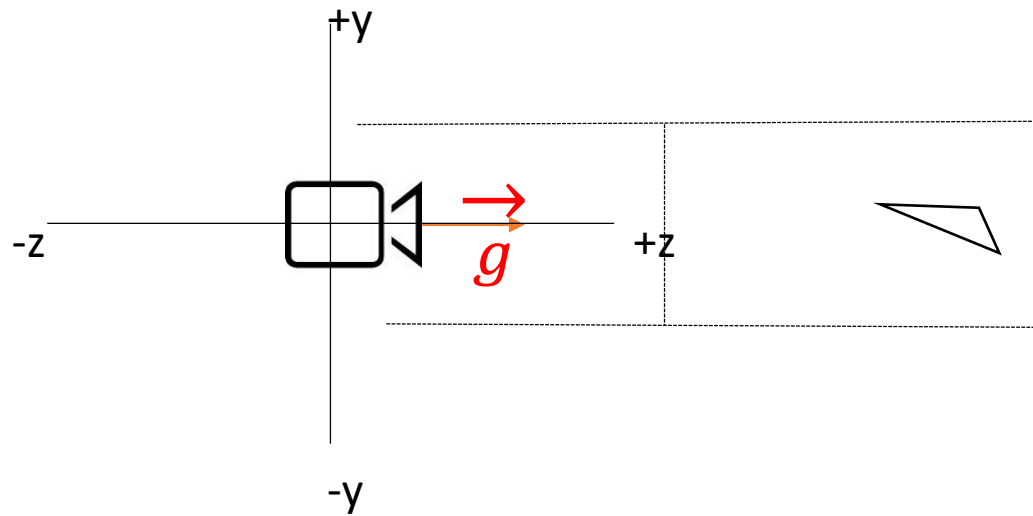
View frustum



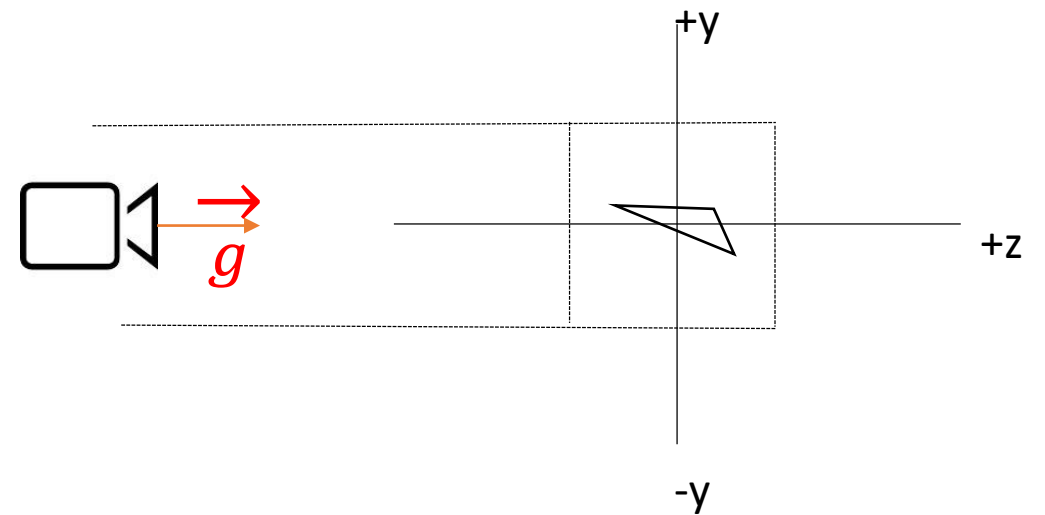
Orthographic view volume



Bryła kanoniczna

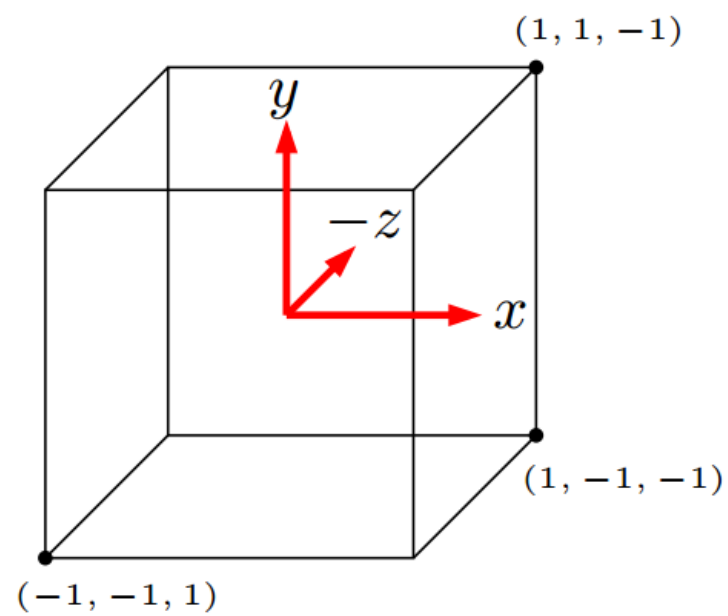


Orthographic view volume

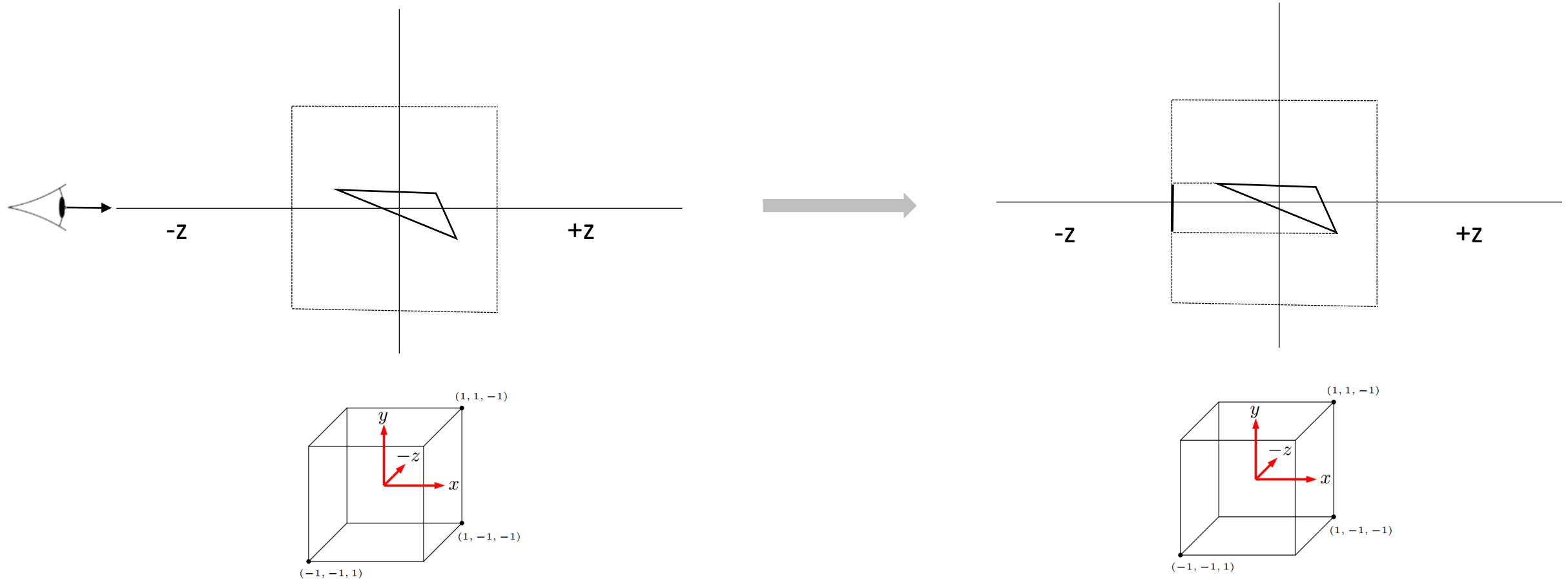


Canonical view volume

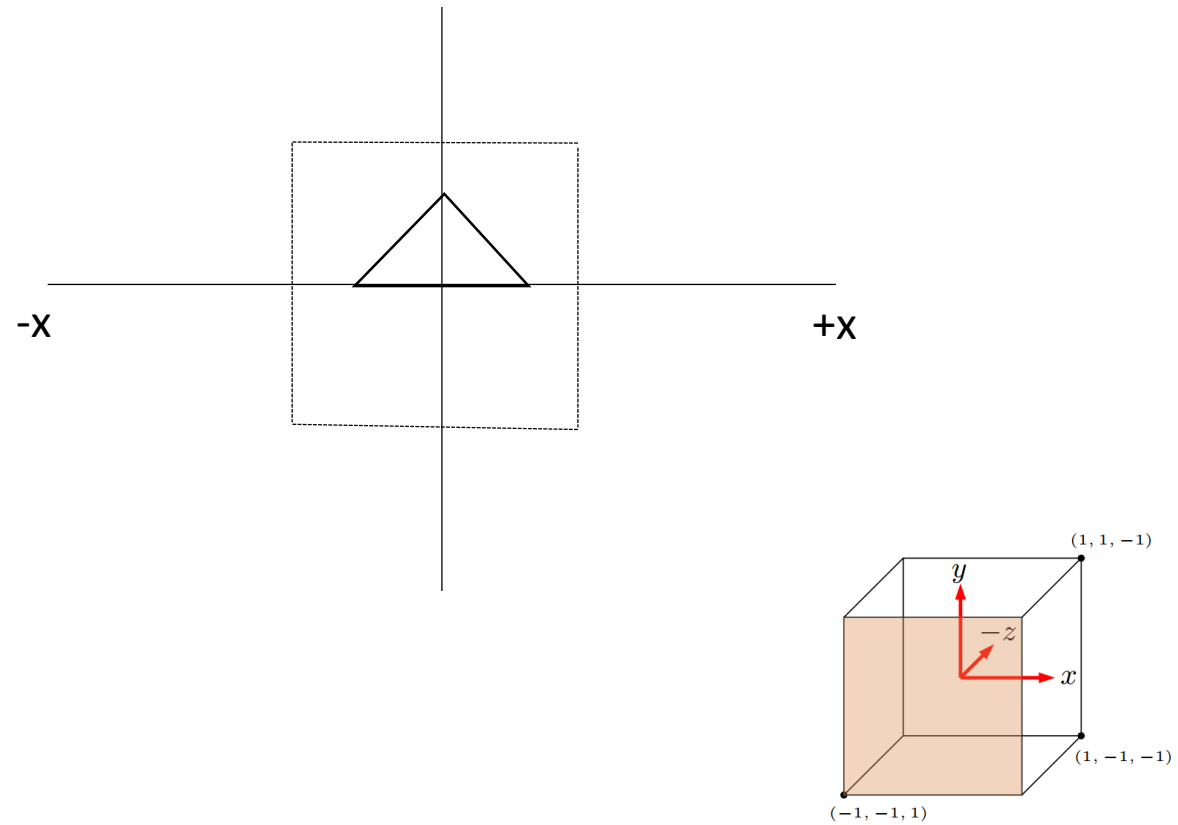
Bryła kanoniczna



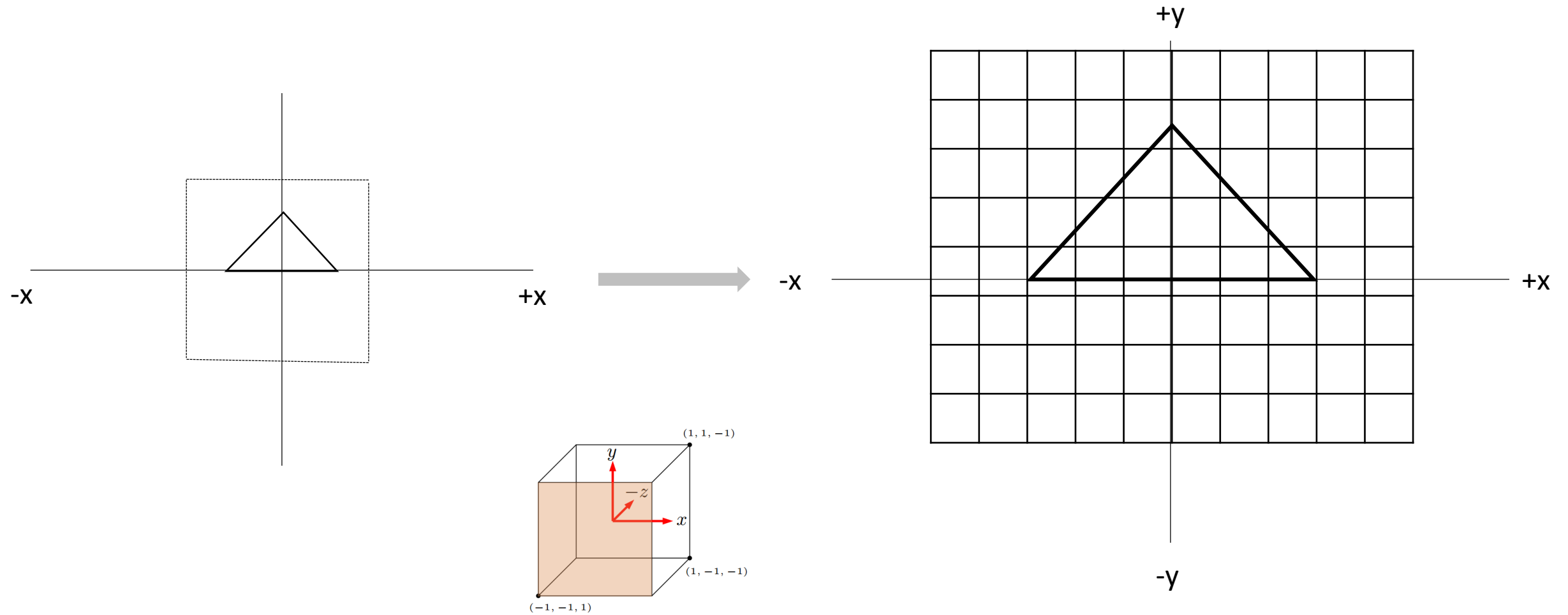
Viewport transformation



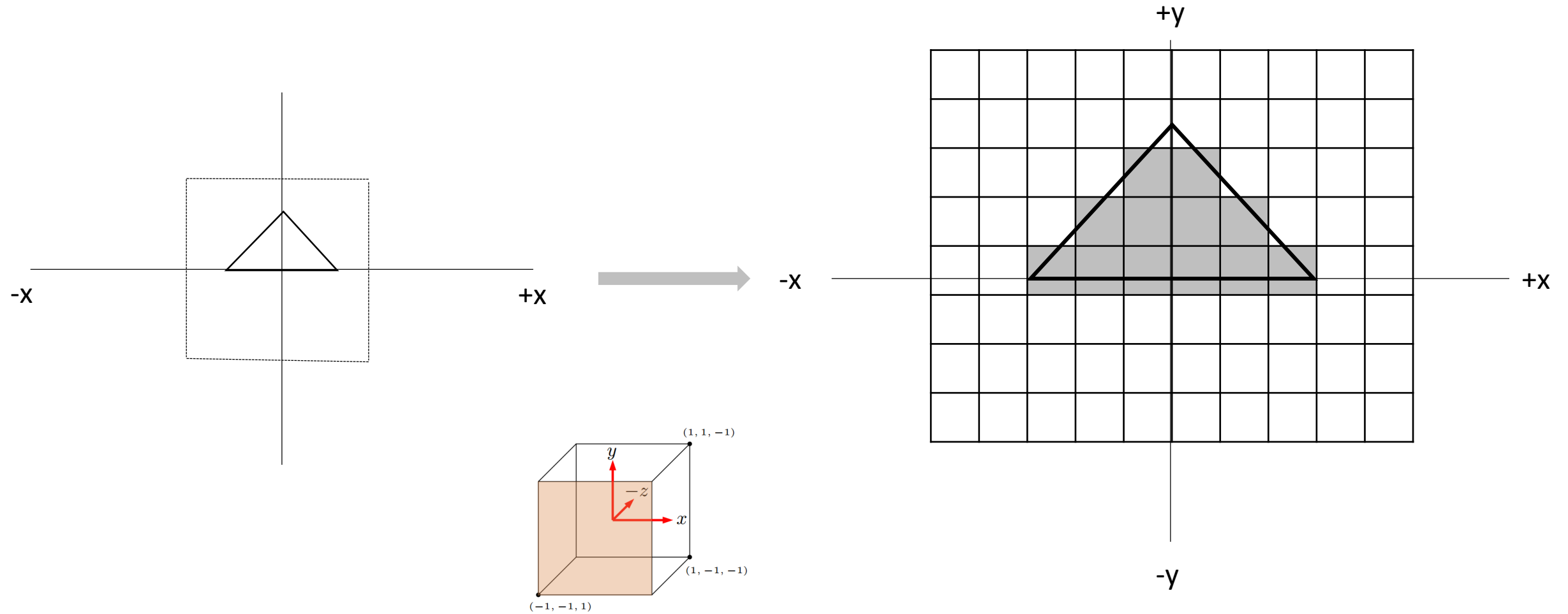
Viewport transformation

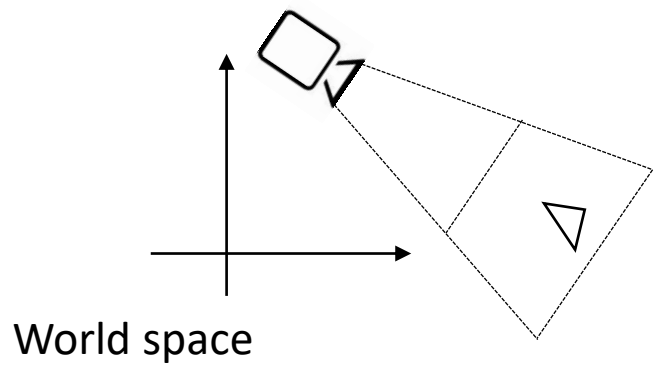


Viewport transformation



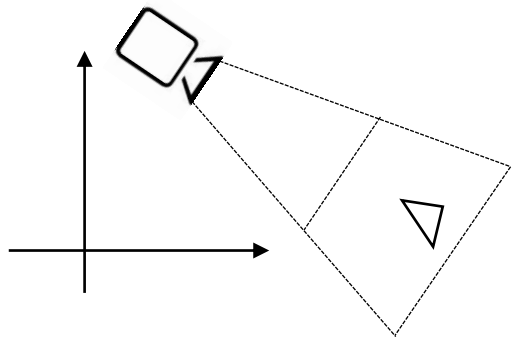
Viewport transformation



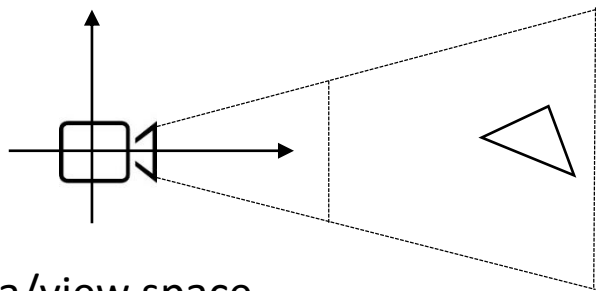


Potok graficzny

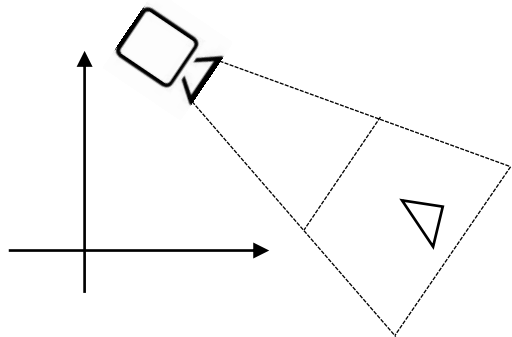
- Każdy krok będziemy chcieli wyrazić za pomocy **operacji macierzowej**. Cały potok może być wykonany za pomocy **jednej operacji macierzy**.



Potok graficzny

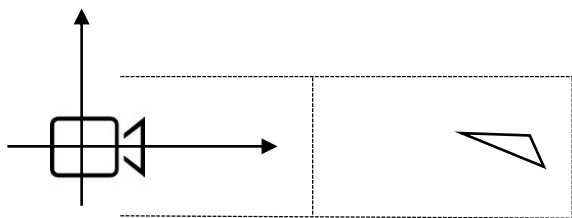
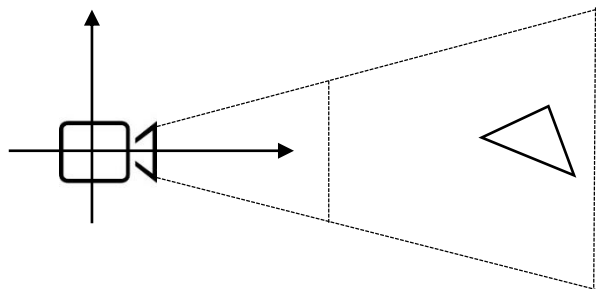


- Każdy krok będziemy chcieli wyrazić za pomocy **operacji macierzowej**. Cały potok może być wykonany za pomocy **jednej operacji macierzy**.

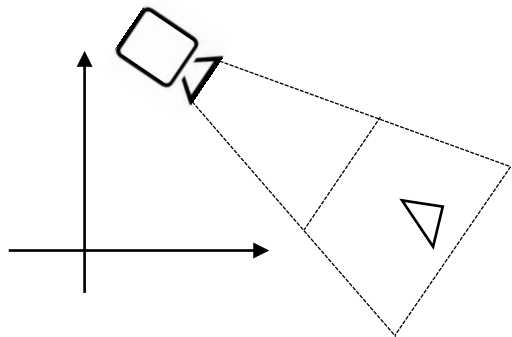


Potok graficzny

- Każdy krok będziemy chcieli wyrazić za pomocy **operacji macierzowej**. Cały potok może być wykonany za pomocy **jednej operacji macierzy**.

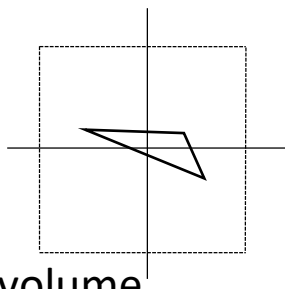
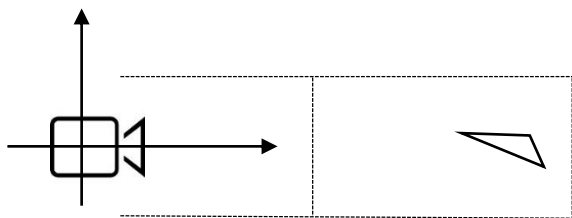
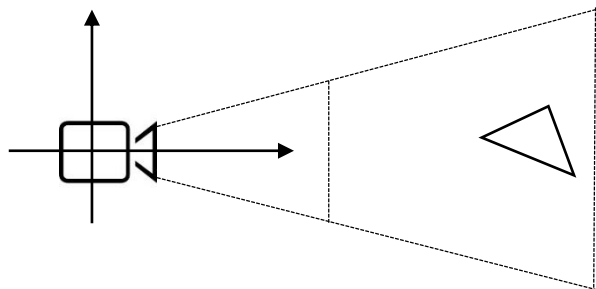


Orthographic view volume

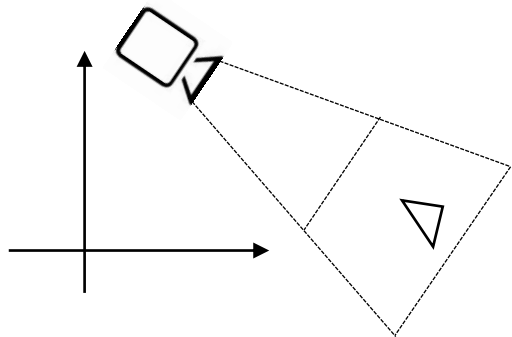


Potok graficzny

- Każdy krok będziemy chcieli wyrazić za pomocy **operacji macierzowej**. Cały potok może być wykonany za pomocy **jednej operacji macierzy**.

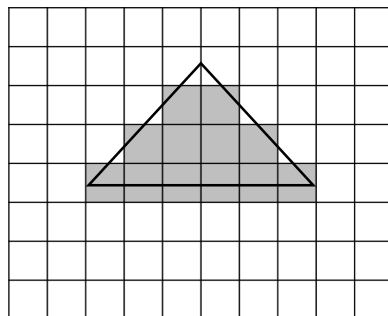
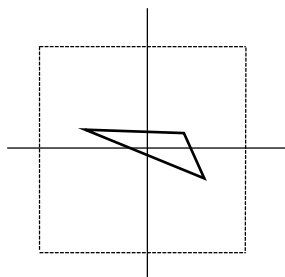
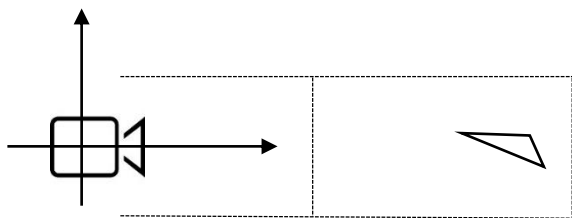
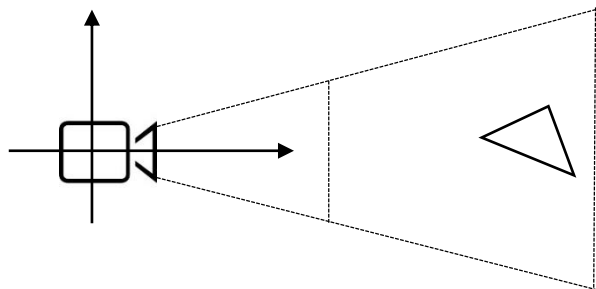


Canonical view volume



Potok graficzny

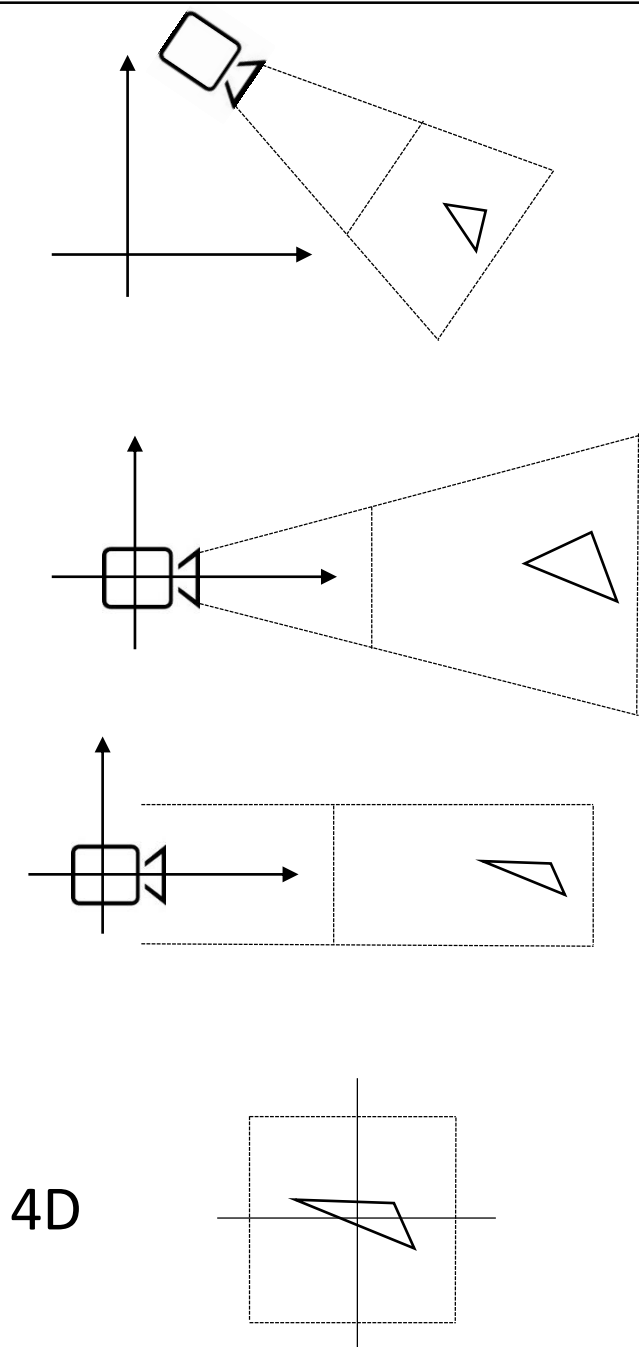
- Każdy krok będziemy chcieli wyrazić za pomocy **operacji macierzowej**. Cały potok może być wykonany za pomocy **jednej operacji macierzy**.



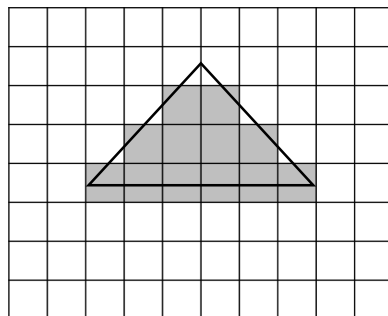
Window space

Potok graficzny

- Każdy krok będziemy chcieli wyrazić za pomocy **operacji macierzowej**. Cały potok może być wykonany za pomocy **jednej operacji macierzy**.

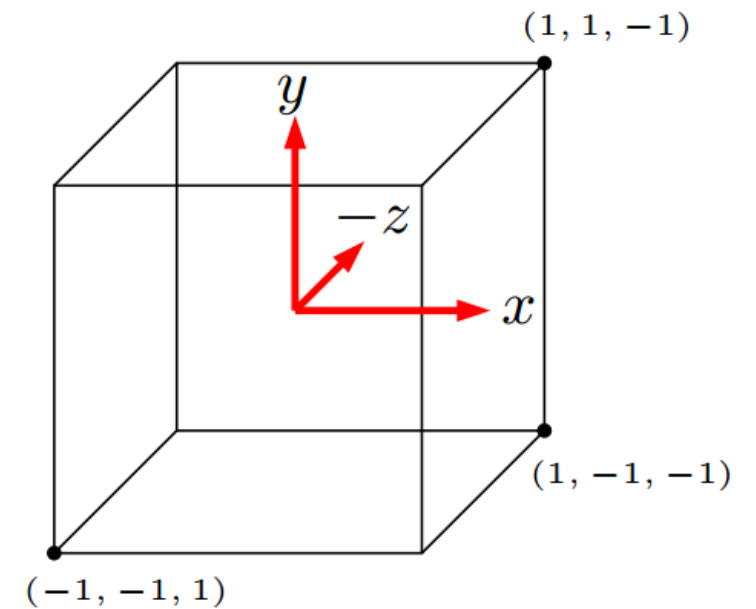


2D



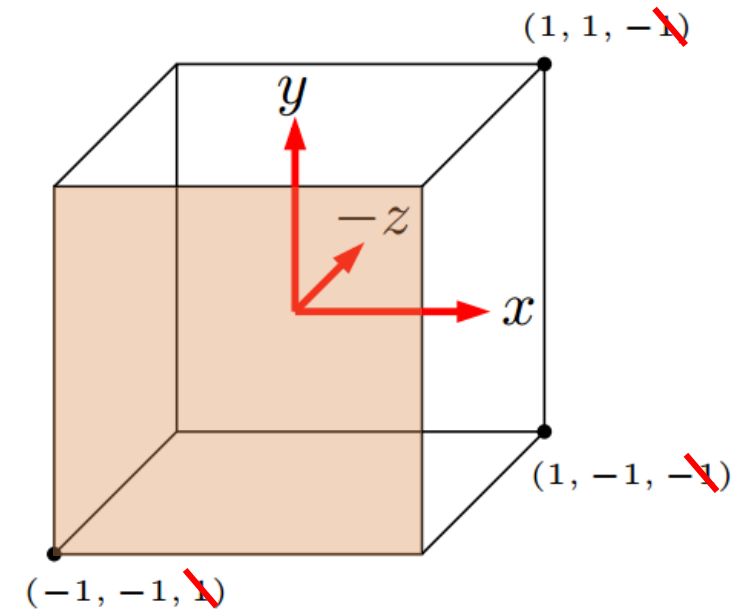
Bryła kanoniczna

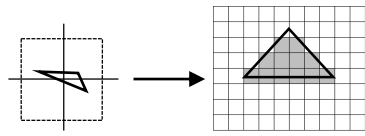
- Bryła kanoniczna to sześcian $2 \times 2 \times 2$ ze środkiem w początku
- Bryła widzenia została przekształcona do postaci takiego sześcianu



Bryła kanoniczna

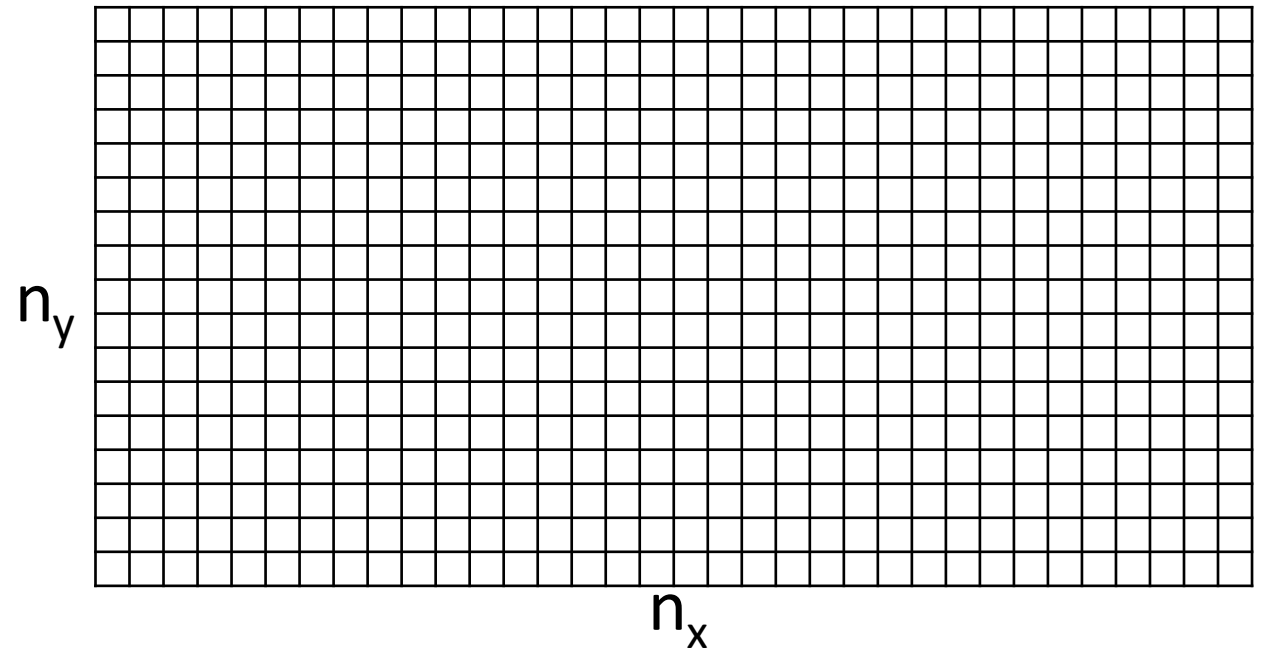
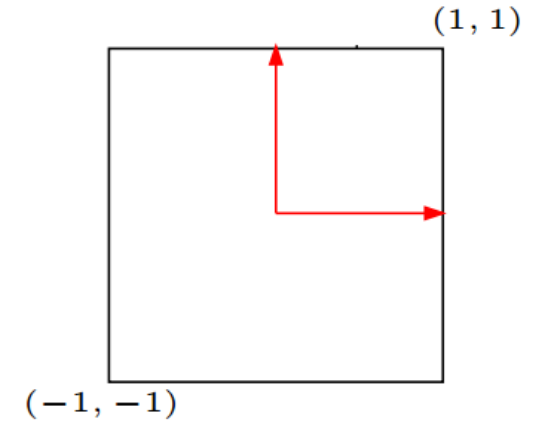
- Bryła kanoniczna to sześcian $2 \times 2 \times 2$ ze środkiem w początku
- Bryła widzenia została przekształcona do postaci takiego sześcianu
- Ucinamy współrzędną z

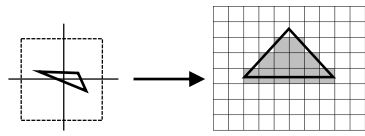




Przekształcenie bryły kanonicznej

- Musimy odwzorować kwadrat $[-1, 1]^2$ na czworokąt $[0, n_x] \times [0, n_y]$



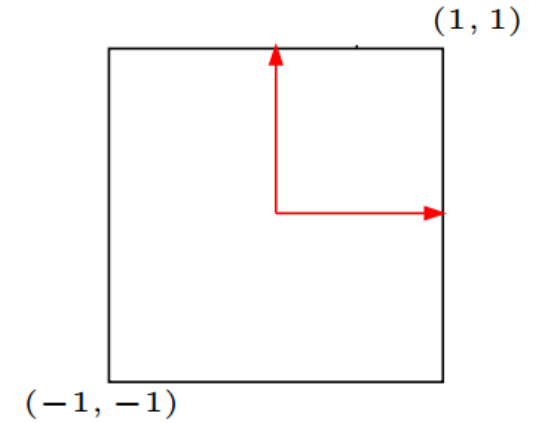
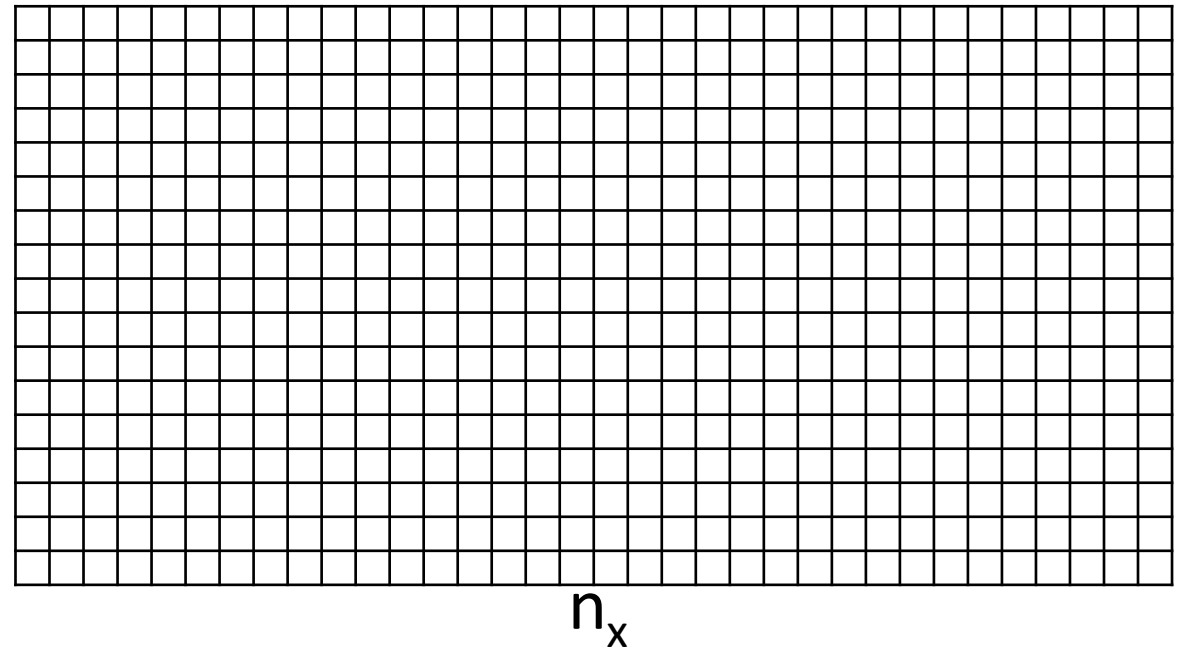


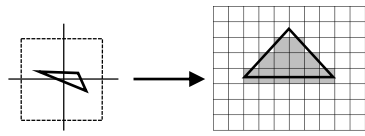
Przekształcenie bryły kanonicznej

- Musimy odwzorować kwadrat $[-1, 1]^2$ na czworokąt $[0, n_x] \times [0, n_y]$
- Następująca macierz transformacji dokonuje skalowania:

$$\begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

n_y

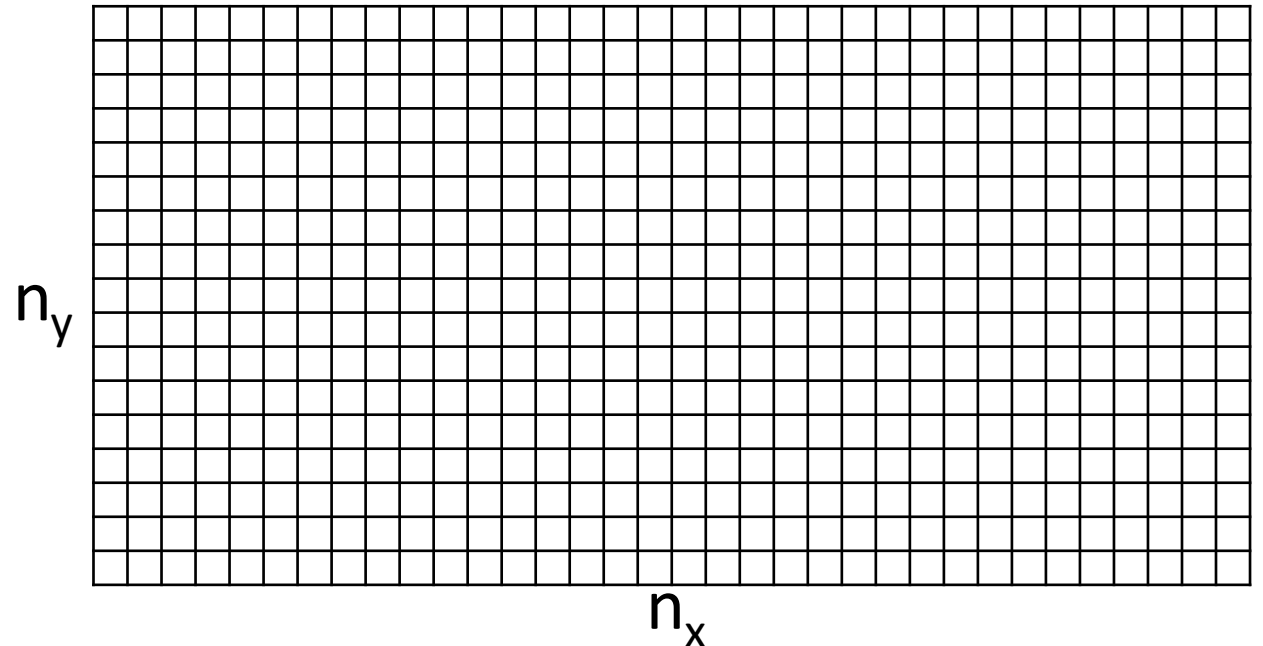
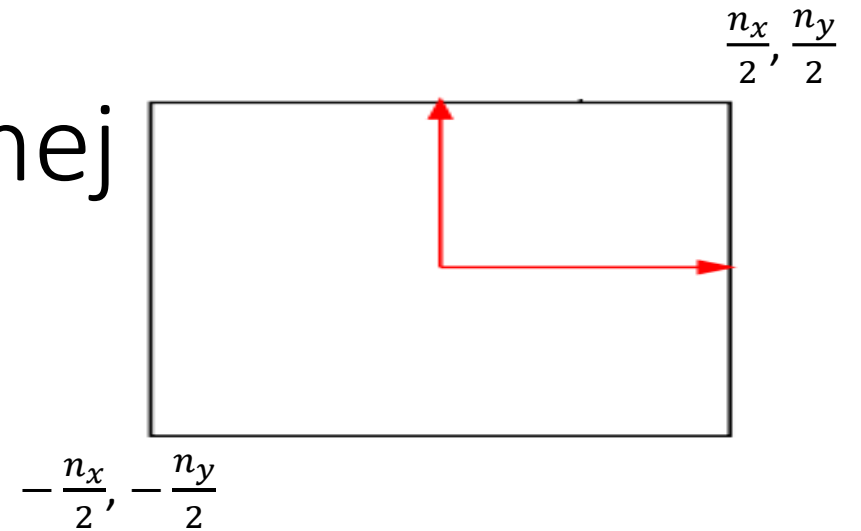


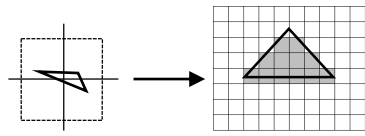


Przekształcenie bryły kanonicznej

- Musimy odwzorować kwadrat $[-1, 1]^2$ na czworokąt $[0, n_x] \times [0, n_y]$
- Następująca macierz transformacji dokonuje skalowania:

$$\begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

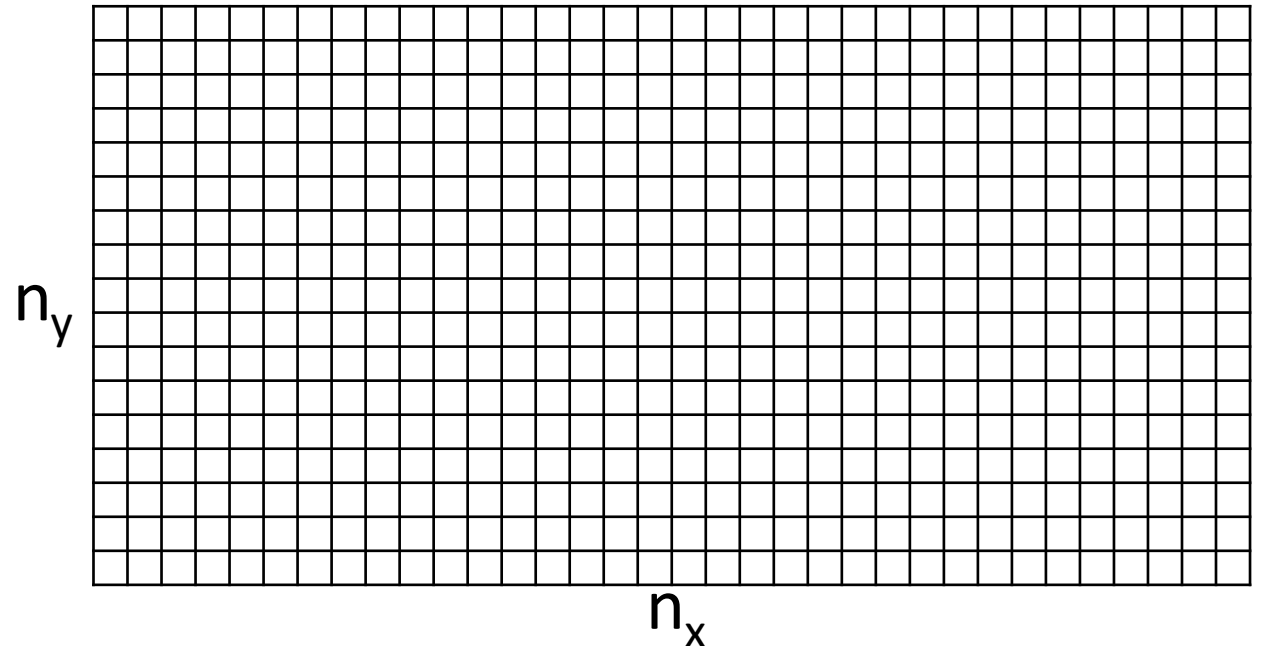
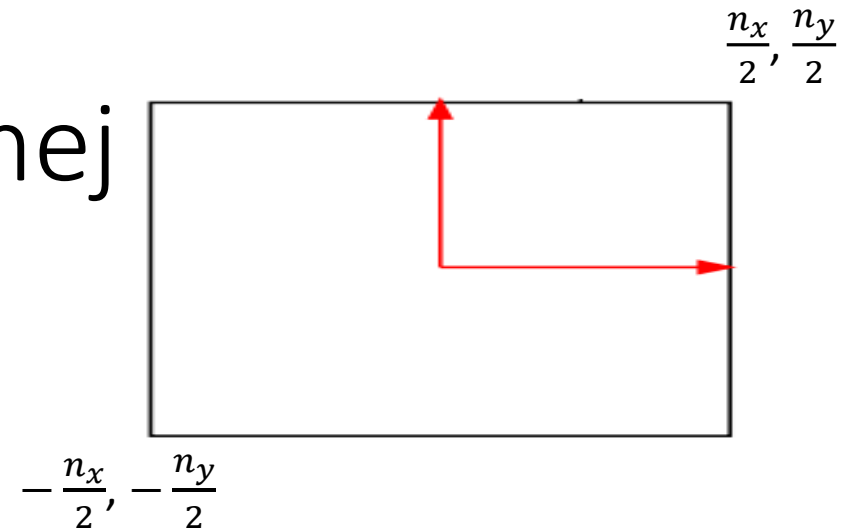


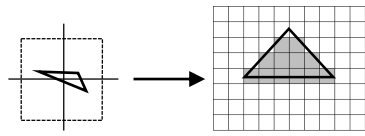


Przekształcenie bryły kanonicznej

- Musimy odwzorować kwadrat $[-1, 1]^2$ na czworokąt $[0, n_x] \times [0, n_y]$
- Następująca macierz transformacji dokonuje translacji:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{n_x}{2} \\ 0 & 1 & \frac{n_y}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

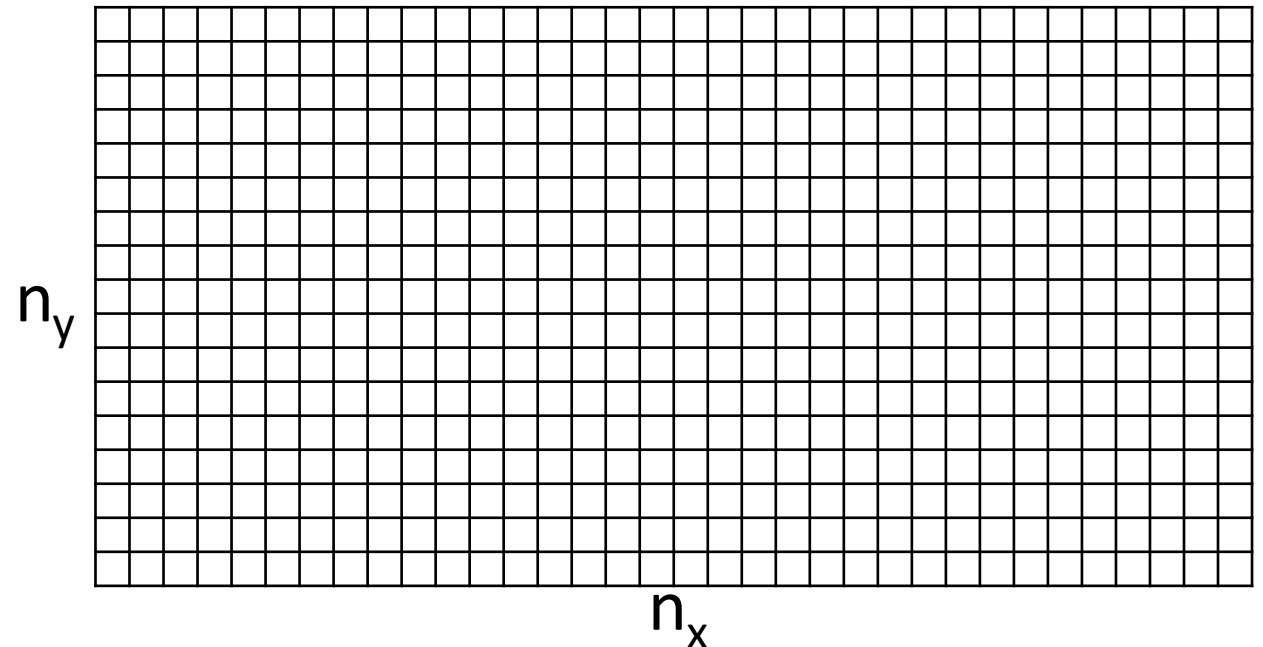
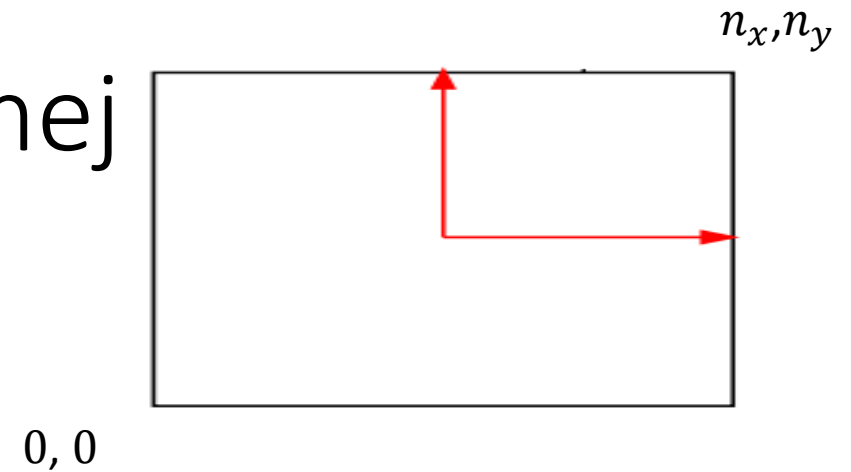


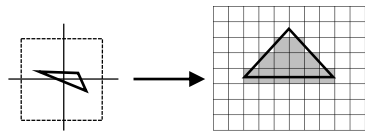


Przekształcenie bryły kanonicznej

- Musimy odwzorować kwadrat $[-1, 1]^2$ na czworokąt $[0, n_x] \times [0, n_y]$
- Następująca macierz transformacji tego dokonuje:

$$\begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & \frac{n_x}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & \frac{n_y}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

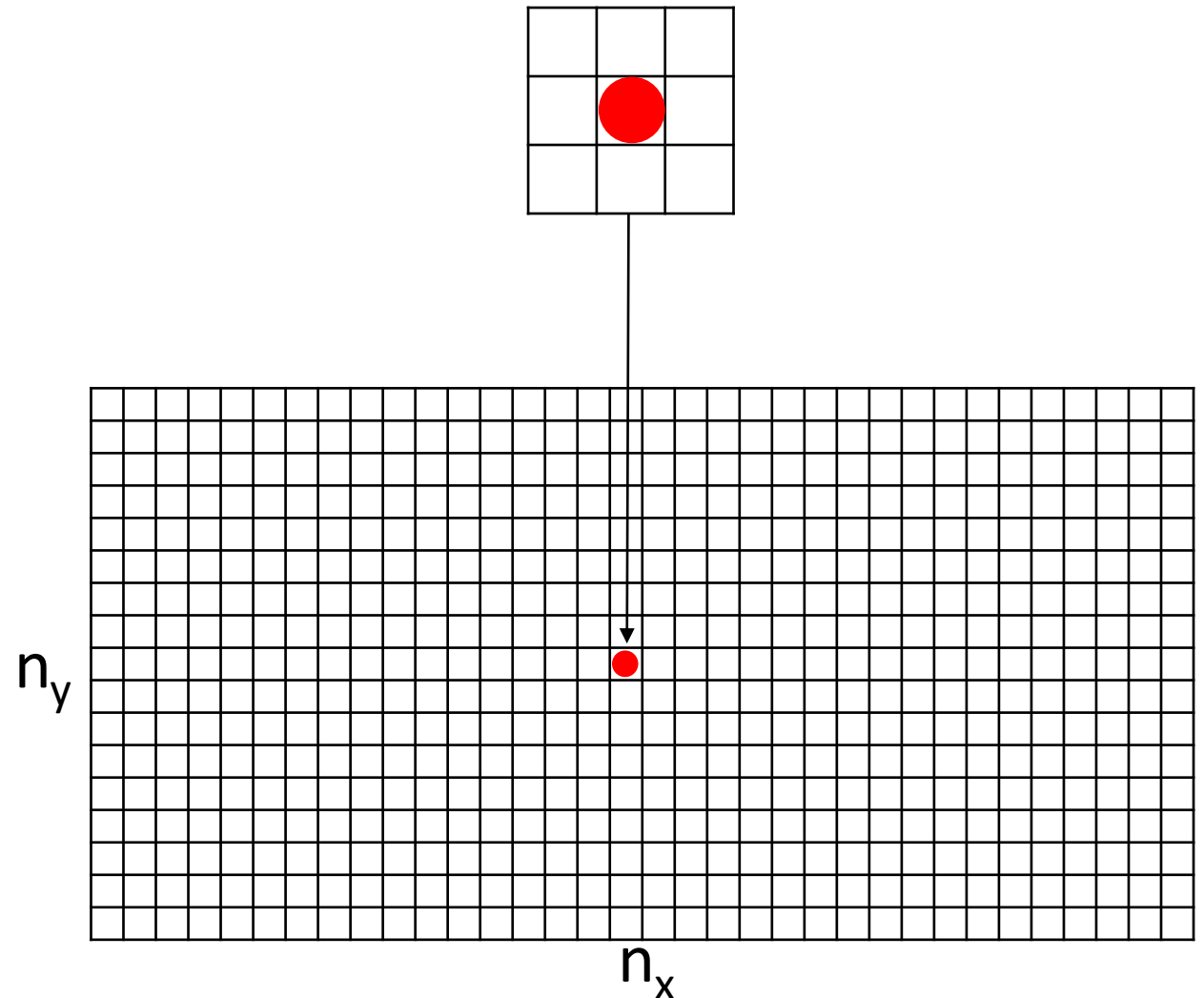


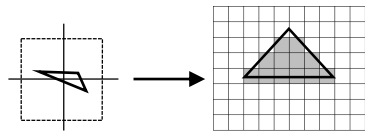


Przekształcenie bryły kanonicznej

- W praktyce piksele reprezentują współrzędne jednostki integer, czyli musimy przekształcać do $[-\frac{1}{2}, n_x - \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, n_y - \frac{1}{2}]$
- Wtedy:

$$\begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & \frac{n_x}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & \frac{n_y}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

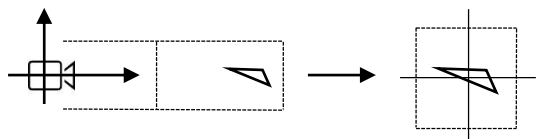




Przekształcenie bryły kanonicznej

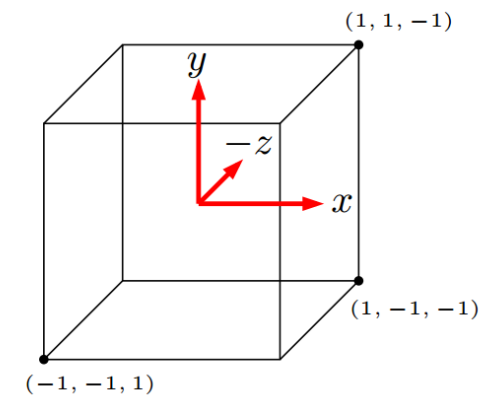
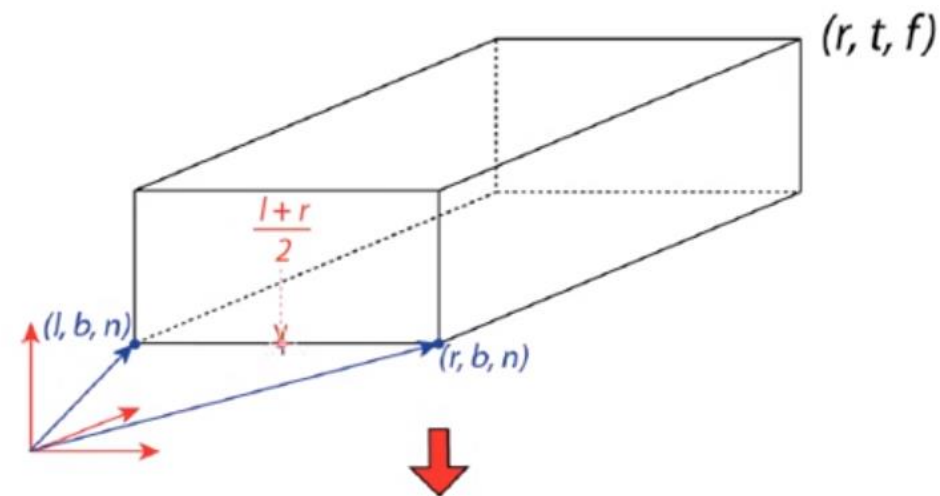
- Rzutowanie dokonaliśmy przy „odrzuconiu” współrzędnej z
- Ale chcemy nadal być w stanie konkatelować naszą macierz z innymi, czyli ostateczna postać naszej macierzy to 4D:

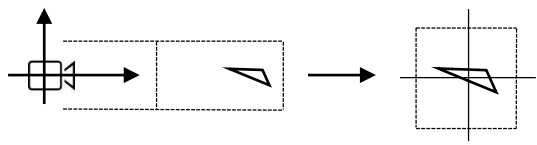
$$M_{vp} = \begin{bmatrix} \frac{n_x}{2} & 0 & 0 & \frac{n_x}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{n_y}{2} & 0 & \frac{n_y}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ortograficzna bryła widzenia

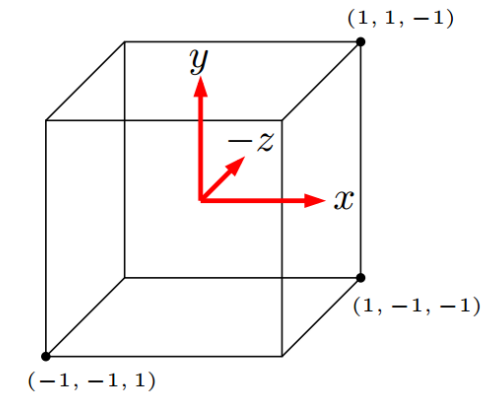
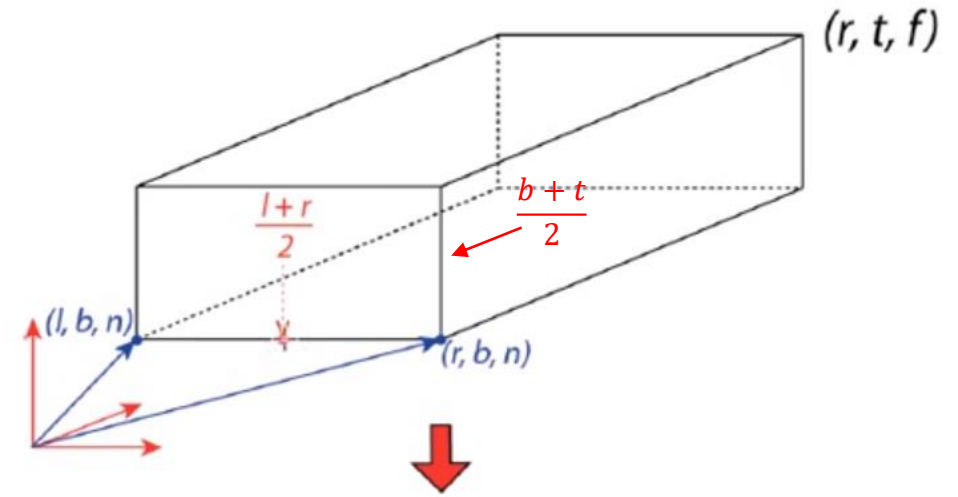
- Najpierw musimy środek do początku przenieść

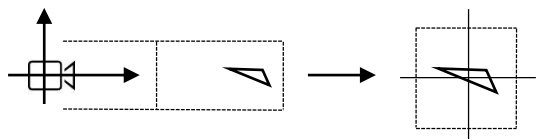




Ortograficzna bryła widzenia

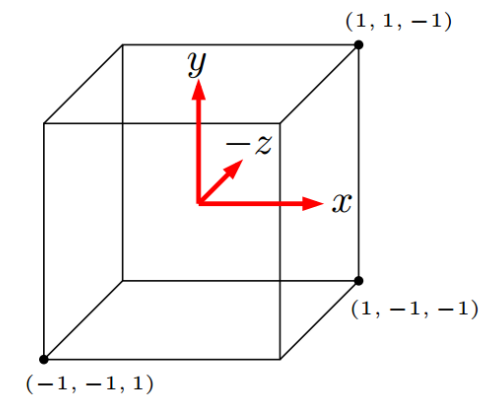
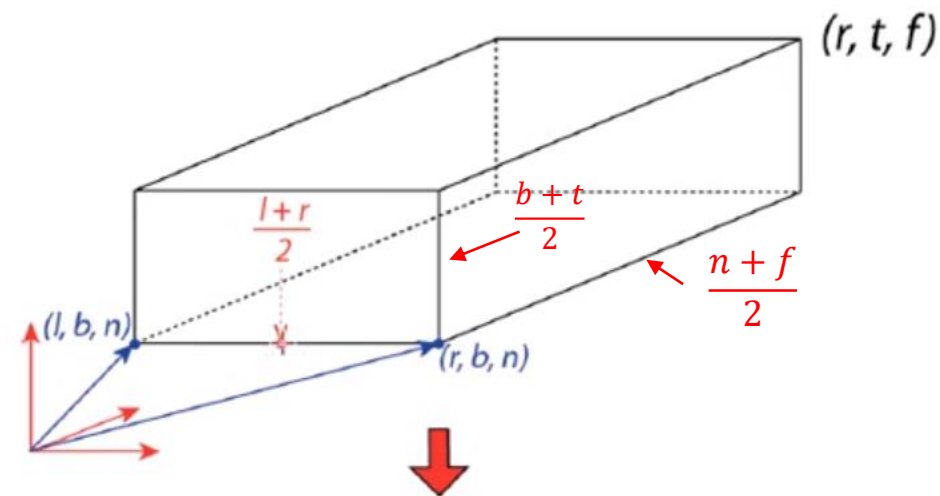
- Najpierw musimy środek do początku przenieść

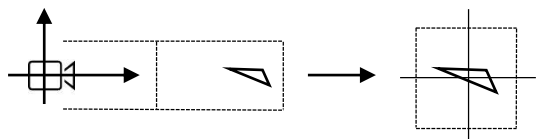




Ortograficzna bryła widzenia

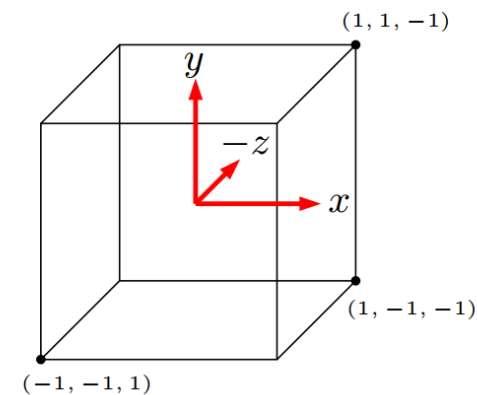
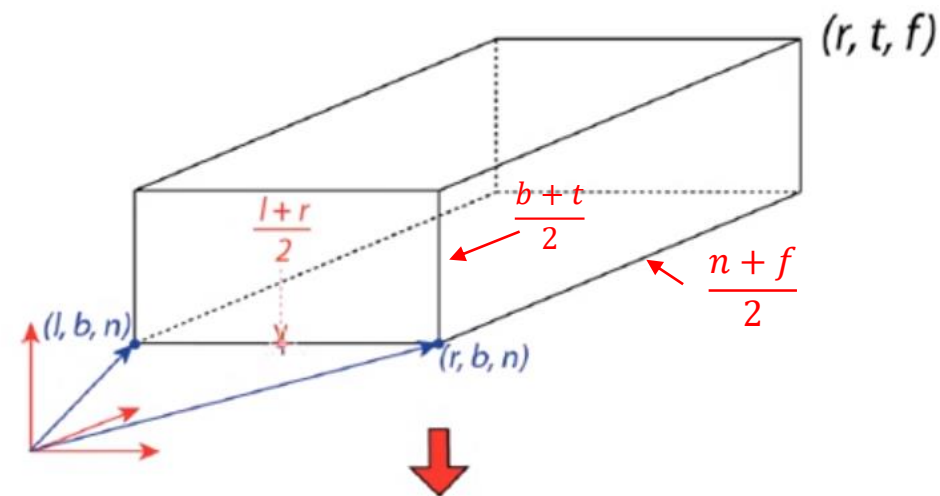
- Najpierw musimy środek do początku przenieść

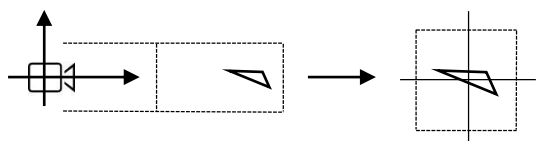




Ortograficzna bryła widzenia

- Najpierw musimy środek do początku przenieść

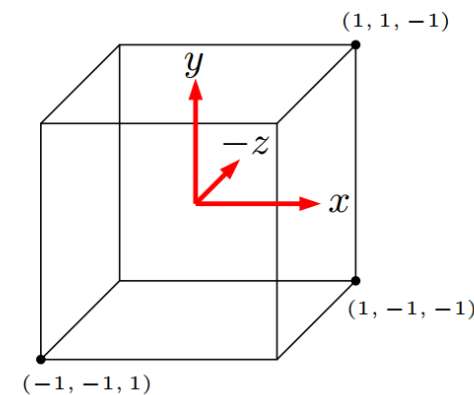
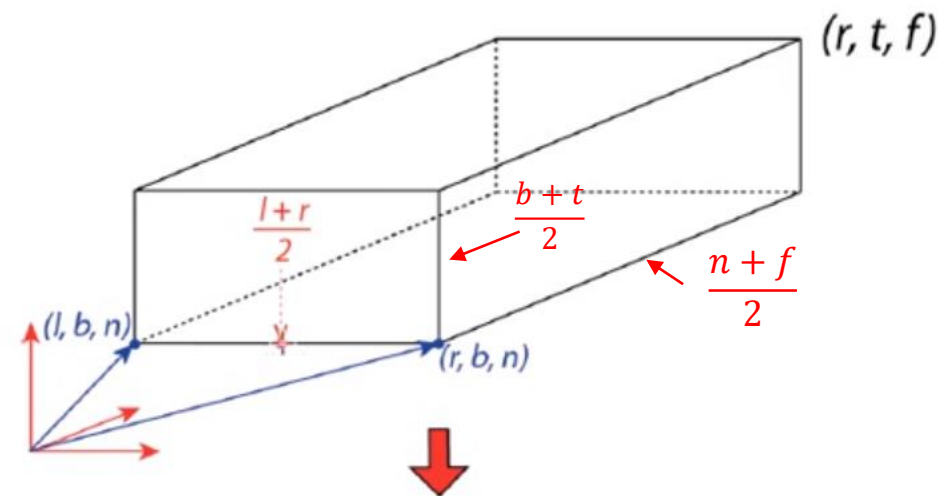


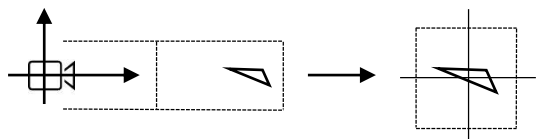


Ortograficzna bryła widzenia

- Najpierw musimy środek do początku przenieść

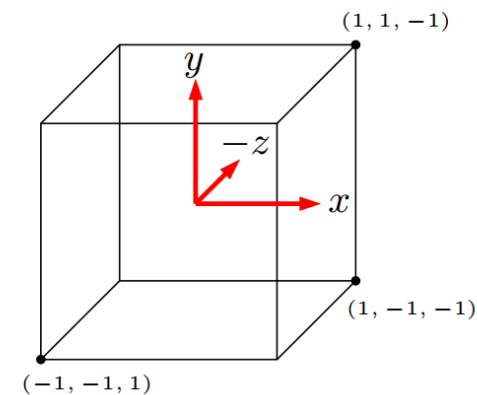
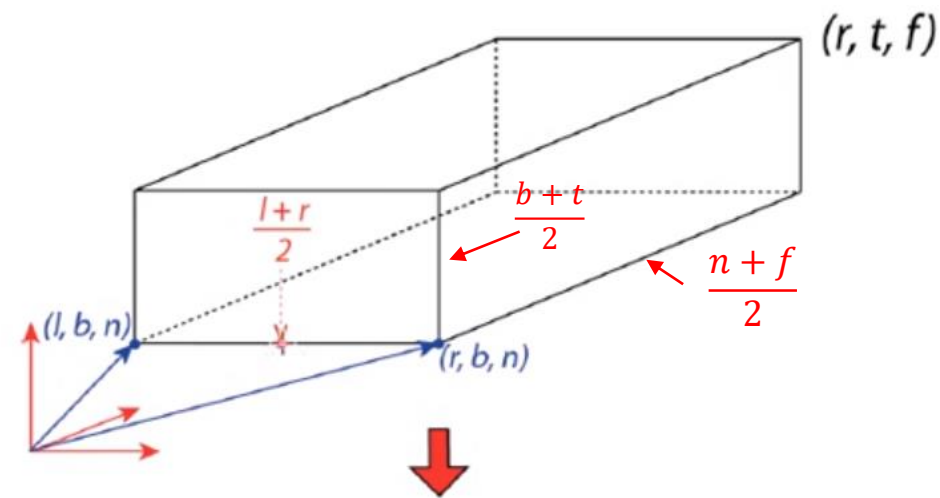
$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

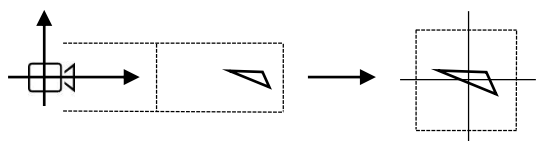




Ortograficzna bryła widzenia

- Potem musimy wszystko skalować do $[-1, 1]$:

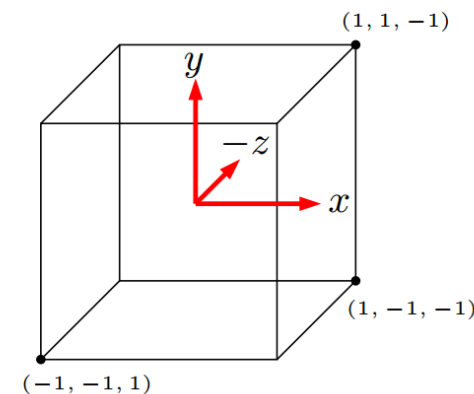
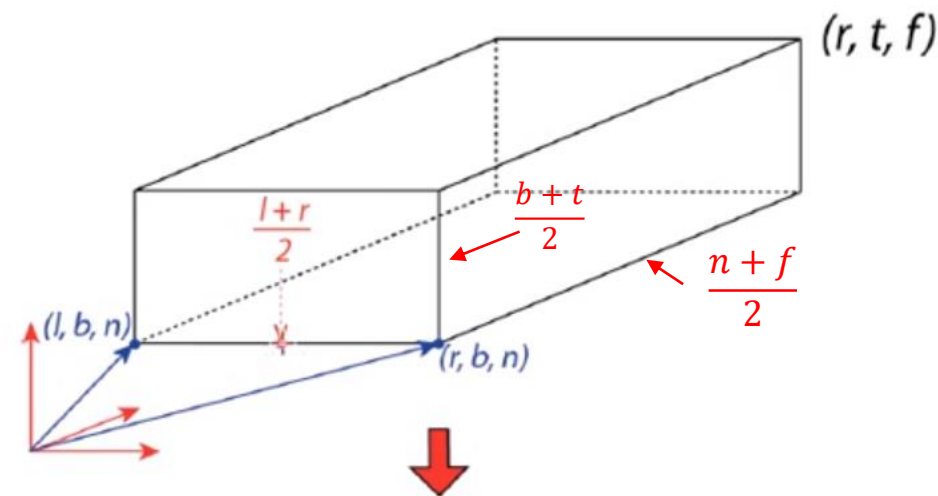




Ortograficzna bryła widzenia

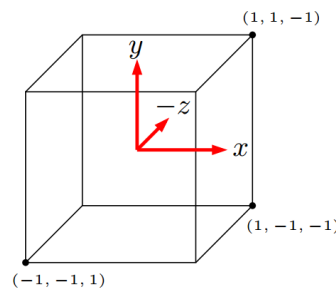
- Potem musimy wszystko skalować do $[-1, 1]$:

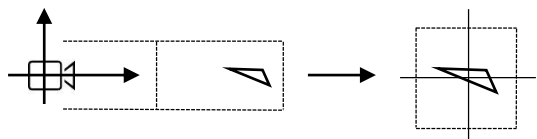
$$\bullet \begin{bmatrix} -\frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





- $$\bullet \quad M_{orth} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

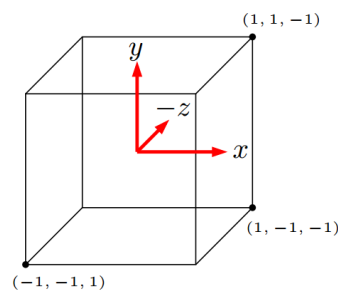




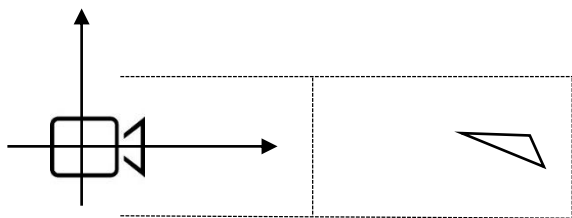
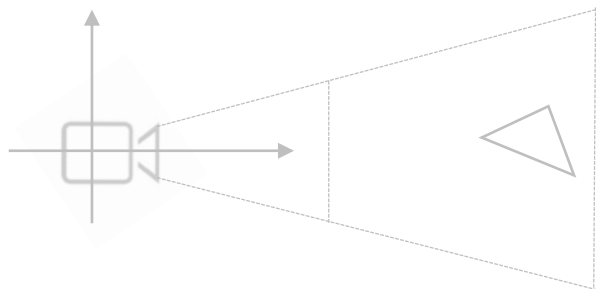
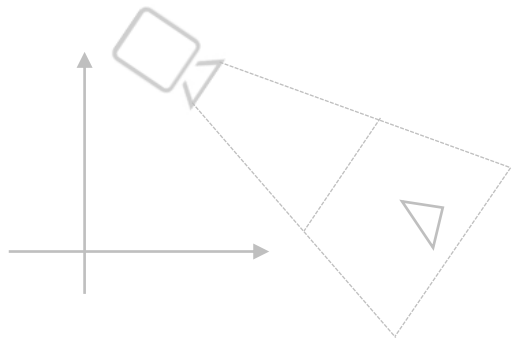
Ortograficzna bryła widzenia

- Konkatenujemy macierze żeby uzyskać jedną macierz transformacji do ortograficznej bryły widzenia:

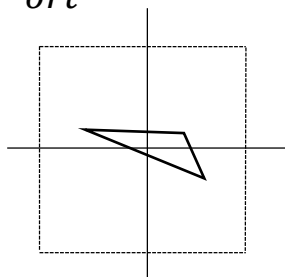
$$\bullet \quad M_{orth} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{l+r}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b+t}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{l+r}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{b+t}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & -\frac{n+f}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



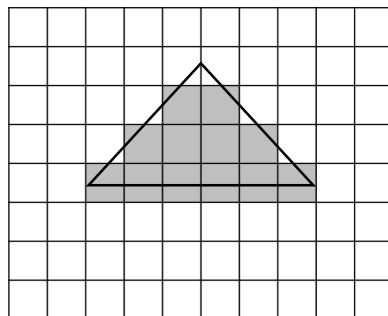
Potok graficzny



M_{ort}



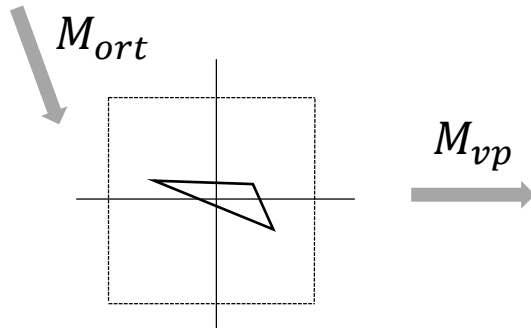
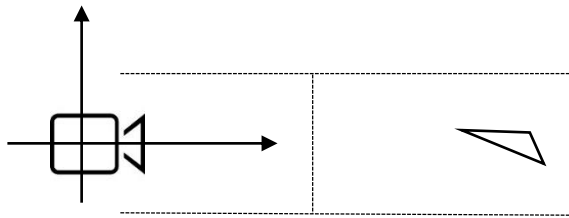
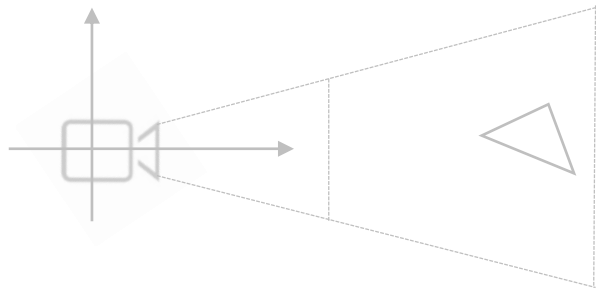
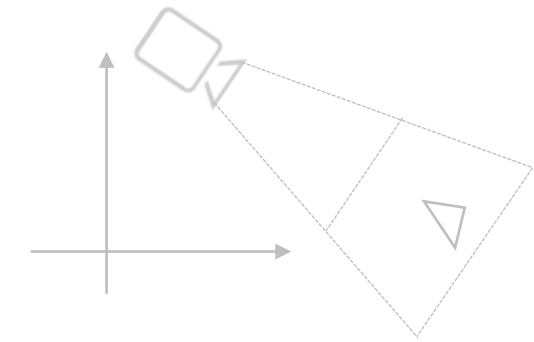
M_{vp}



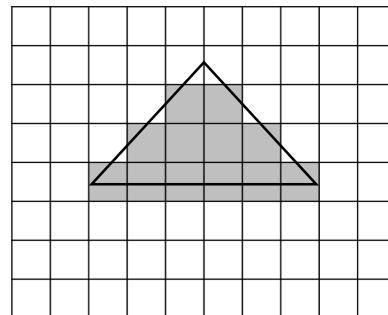
Potok graficzny

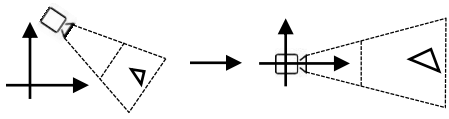
- Transformacja:

$$\bullet \begin{bmatrix} x_{piksel} \\ y_{piksel} \\ z_{kanoniczny} \\ 1 \end{bmatrix} = M_{vp} M_{ort} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



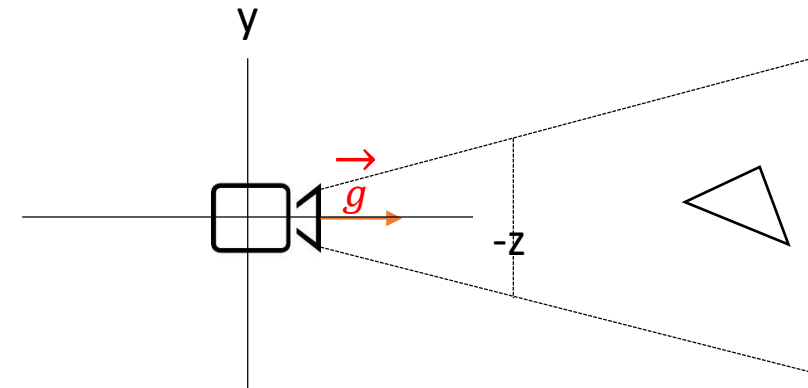
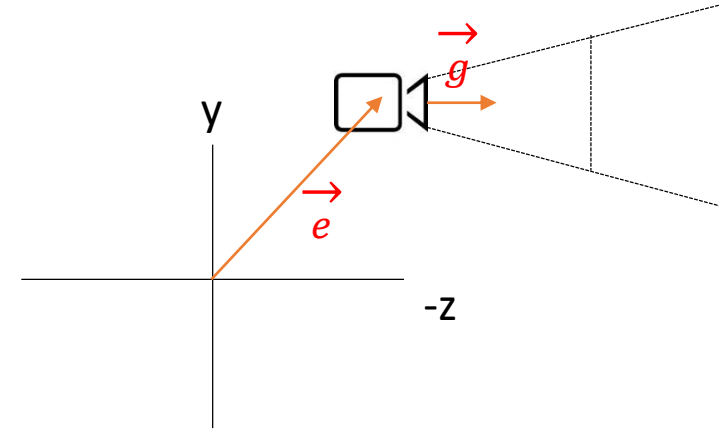
M_{vp}

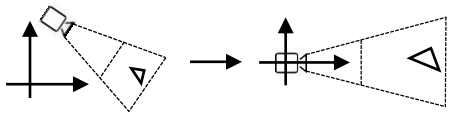




Wyrównanie systemów współrzędnych

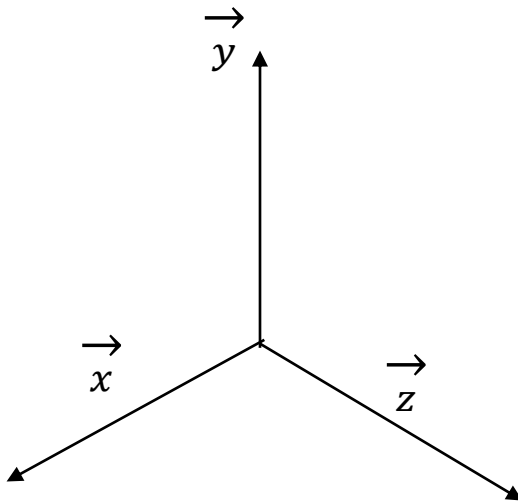
- World space:
 - Wektory, $\vec{x}$, $\vec{y}$, i $\vec{z}$
- Camera space:
 - Wektory $\vec{e}$, i $\vec{g}$



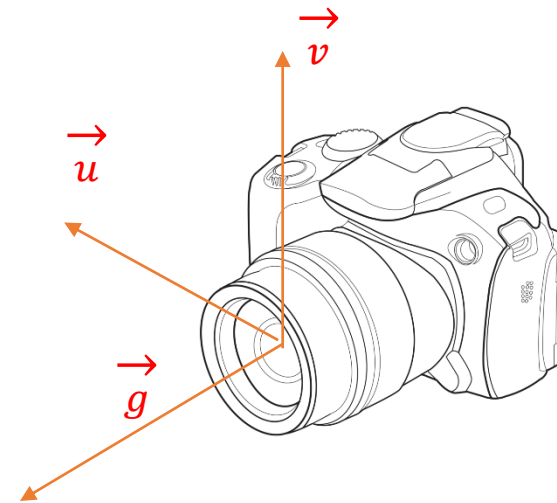


Wyrównanie systemów współrzędnych

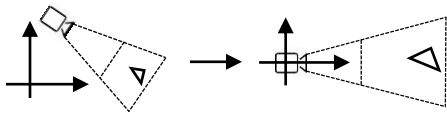
- Żeby jedną przestrzeń na drugą przestrzeń przekształcić potrzebujemy jednego systemu współrzędnych dla obydwóch przestrzeni



Układ świata



Układ kamery



Wyrównanie systemów współrzędnych

- Pierwszy wektor bazowy:

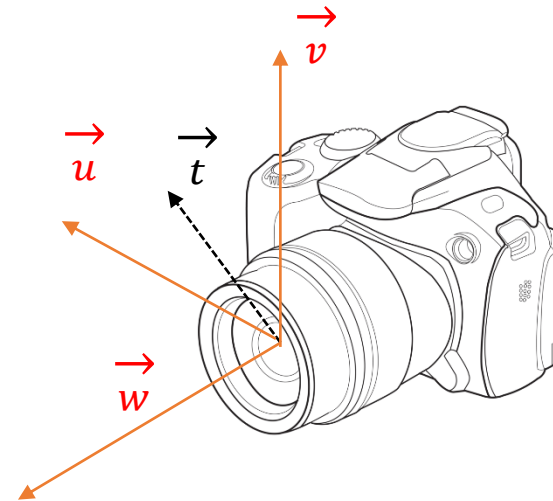
- $\vec{t} \times \vec{g} = \vec{u}$

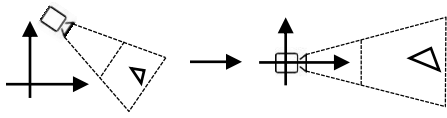
- Drugi wektor bazowy:

- $\vec{g} \times \vec{u} = \vec{v}$

- Trzeci wektor bazowy:

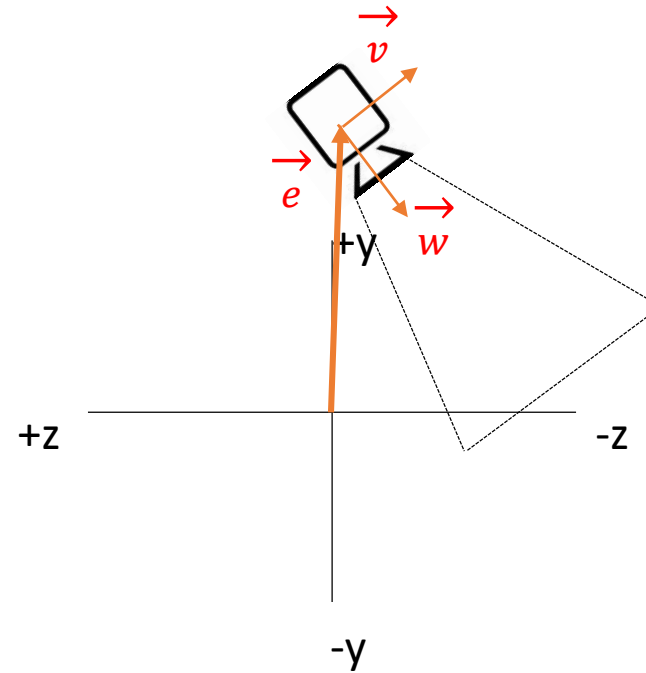
- $-\vec{g} := \vec{w}$

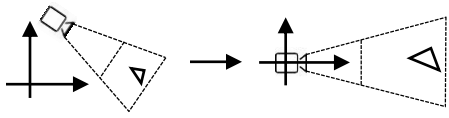




Wyrównanie systemów współrzędnych

- Wyrównać początki naszych systemów współrzędnych
- Wyrównać wektory bazowe

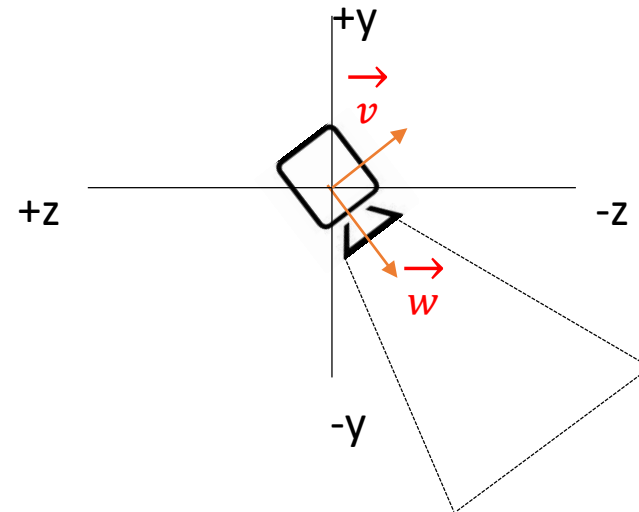
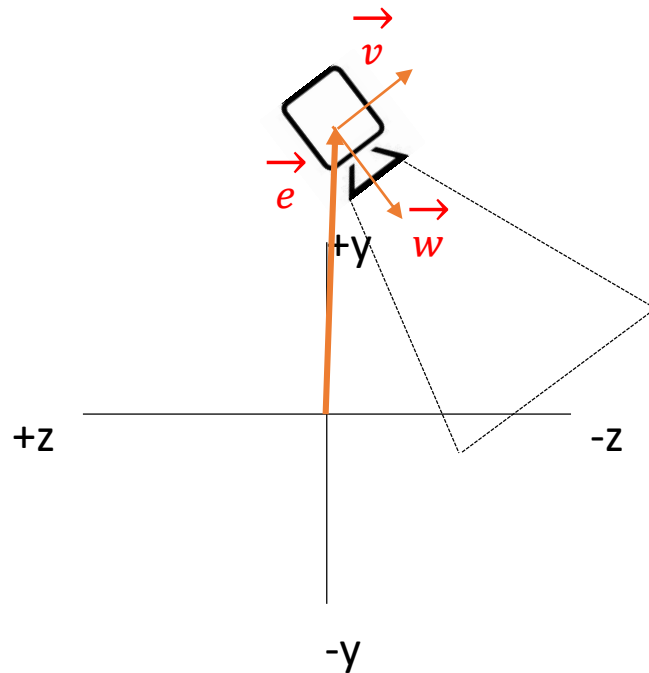


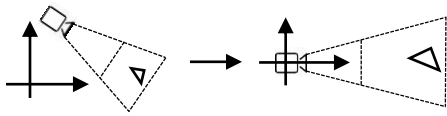


Wyrównanie systemów współrzędnych

- Wyrównanie początków przez translacje:

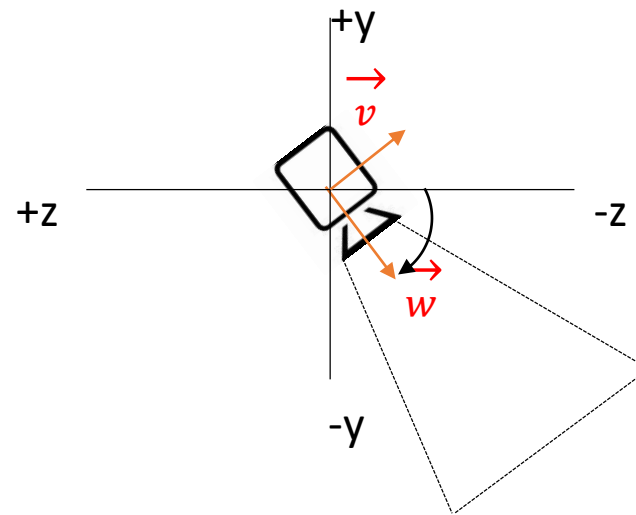
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

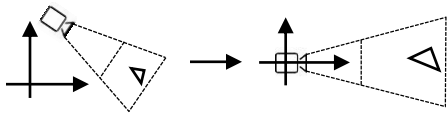




Wyrównanie systemów współrzędnych

- Rotacja w przeciwnym kierunku jest trywialna:
$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

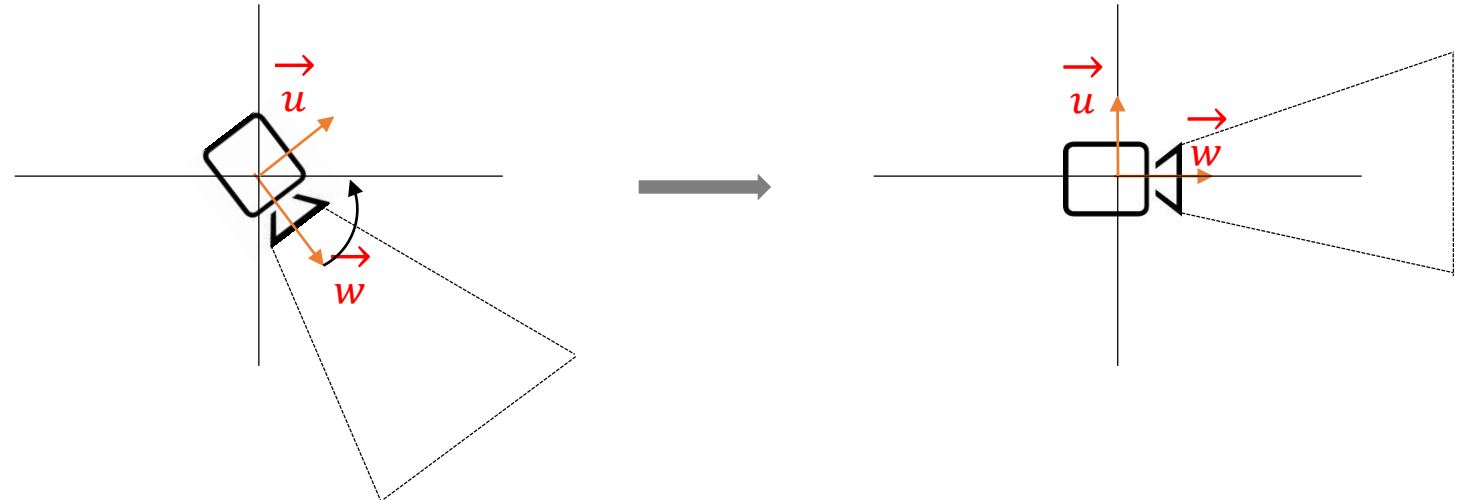


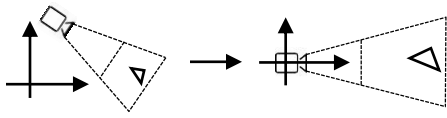


Wyrównanie systemów współrzędnych

- Macierz odwrotna w przypadku ortonormalnej bazy to transpozycja tej macierzy (wektory u, v, w muszą być znormalizowane):

$$\bullet \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



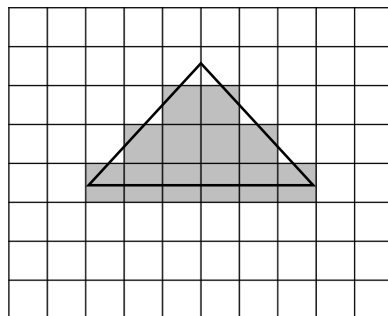
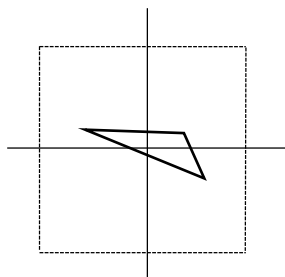
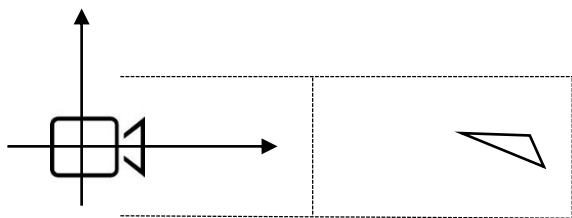
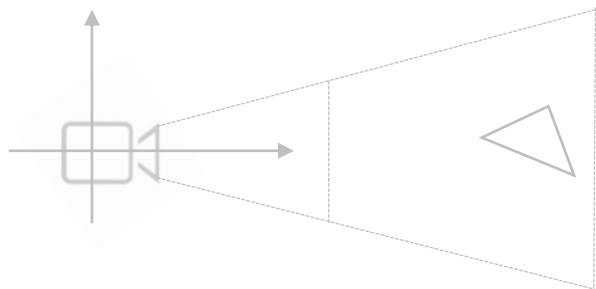
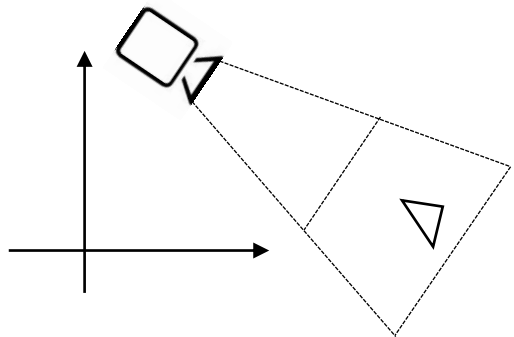


Wyrównanie systemów współrzędnych

- Macierz transformacji z world space na view space jest wtedy:

$$M_{cam} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rzutowanie ortograficzne



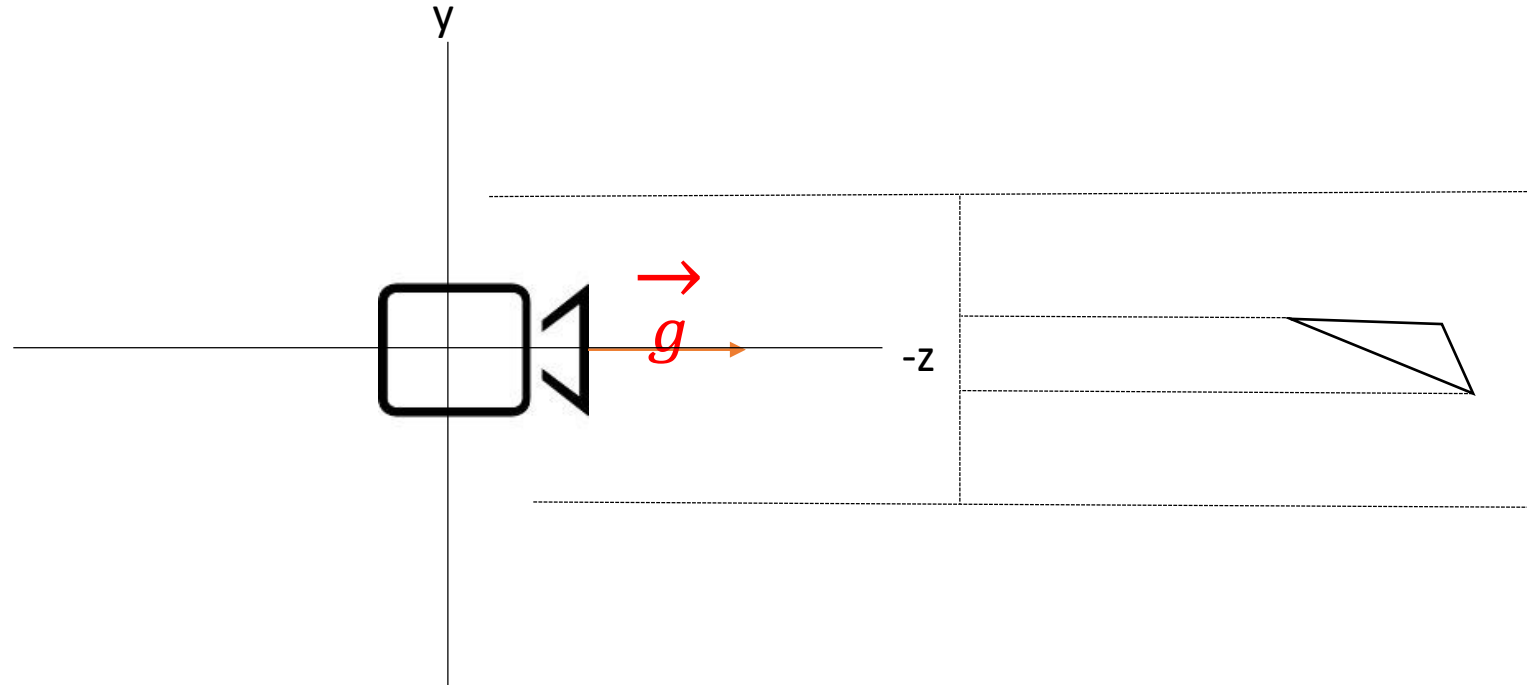
$$\begin{bmatrix} x_{piksel} \\ y_{piksel} \\ z_{kanoniczny} \\ 1 \end{bmatrix} = M_{vp} M_{orth} M_{cam} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rzutowanie równoległe



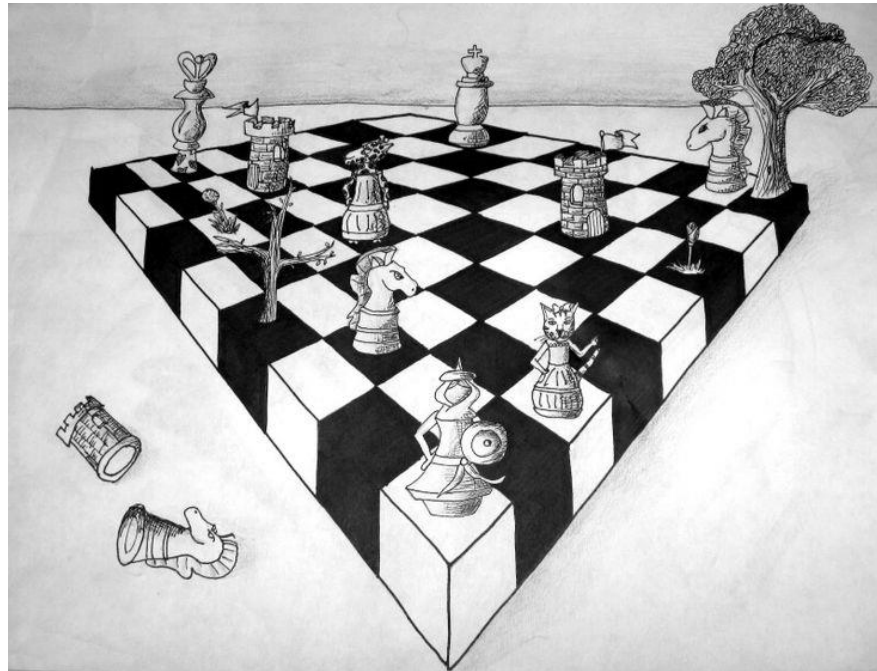
The Simpsons Tapped Out

Rzutowanie równoległe

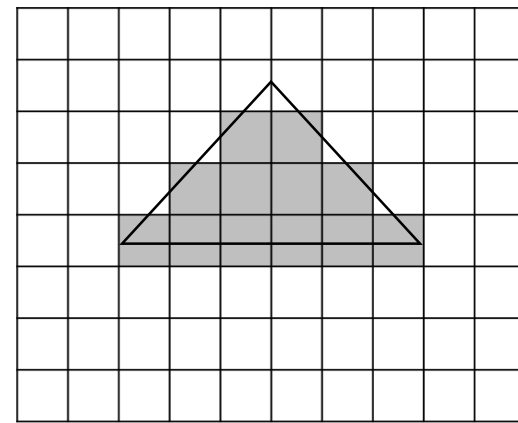
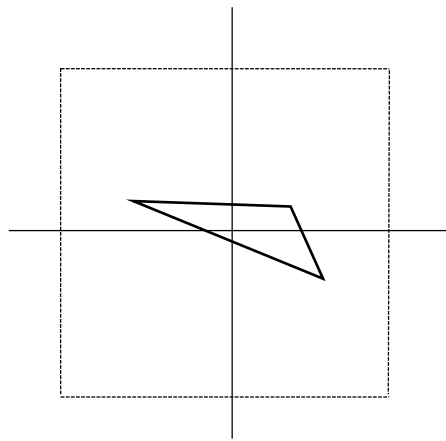
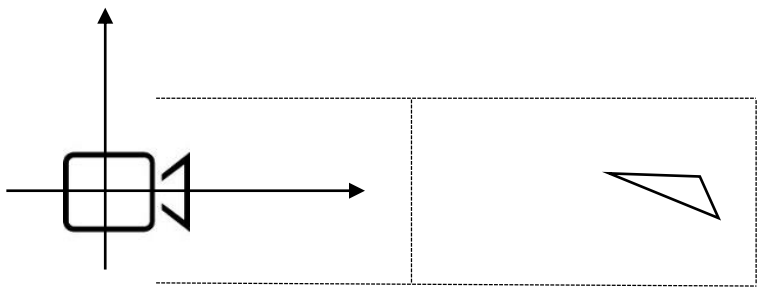


Rzutowanie perspektywiczne

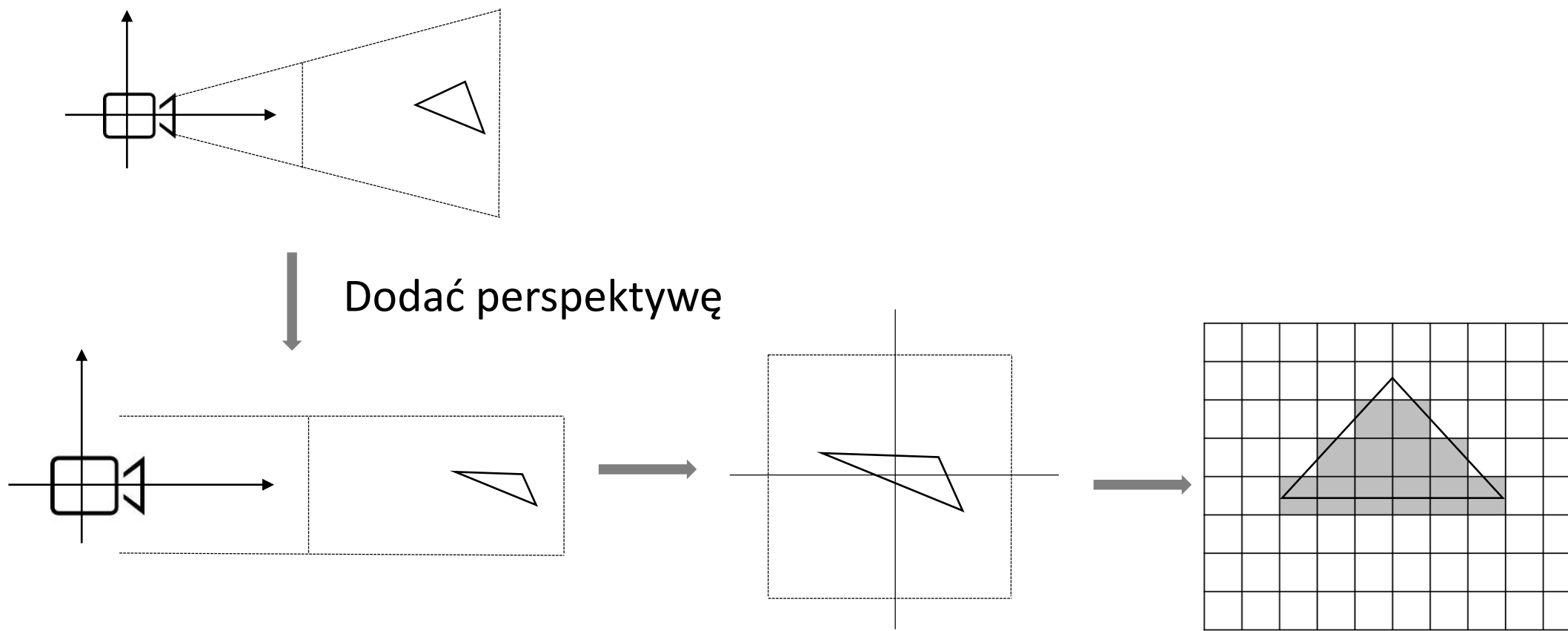
- Co jest perspektywa?
- Wielkość obiektu jest proporcjonalna do dystansu.



Potok graficzny

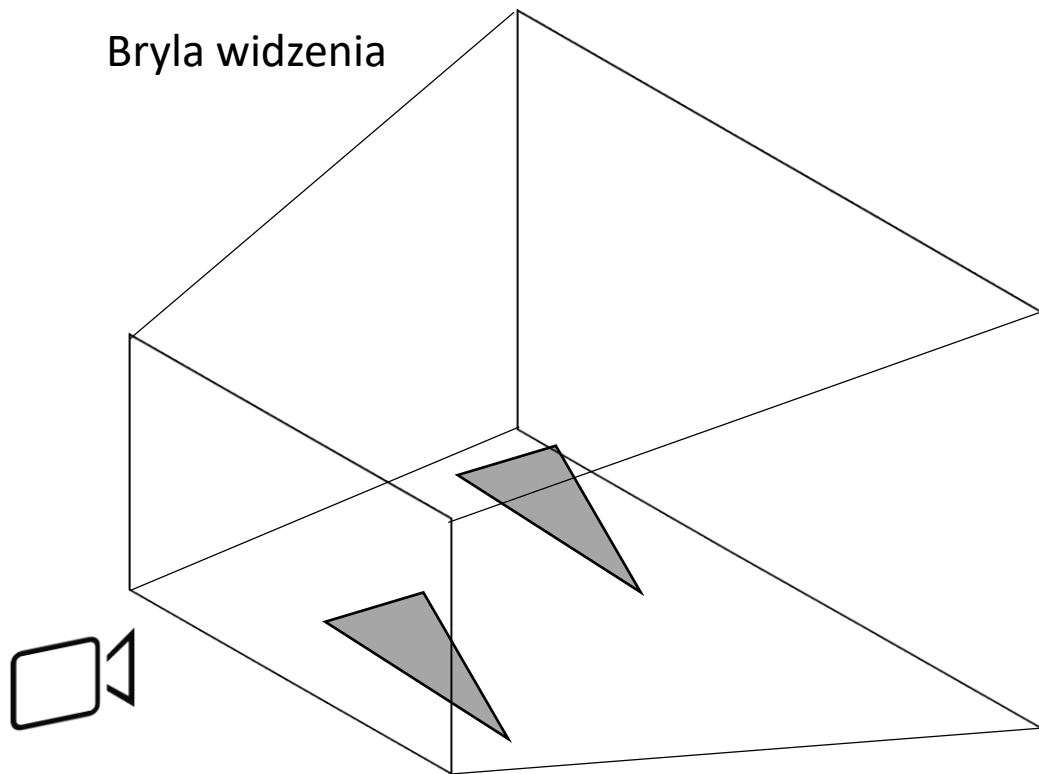


Potok graficzny

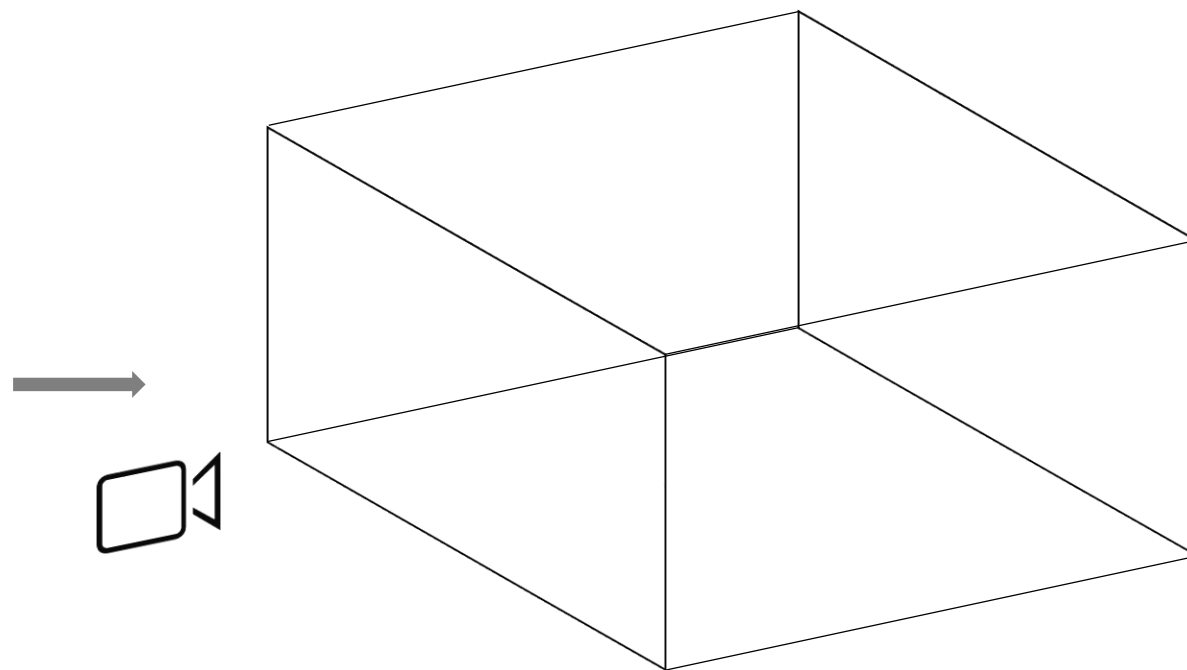


Transformacja bryły widzenia

Bryła widzenia

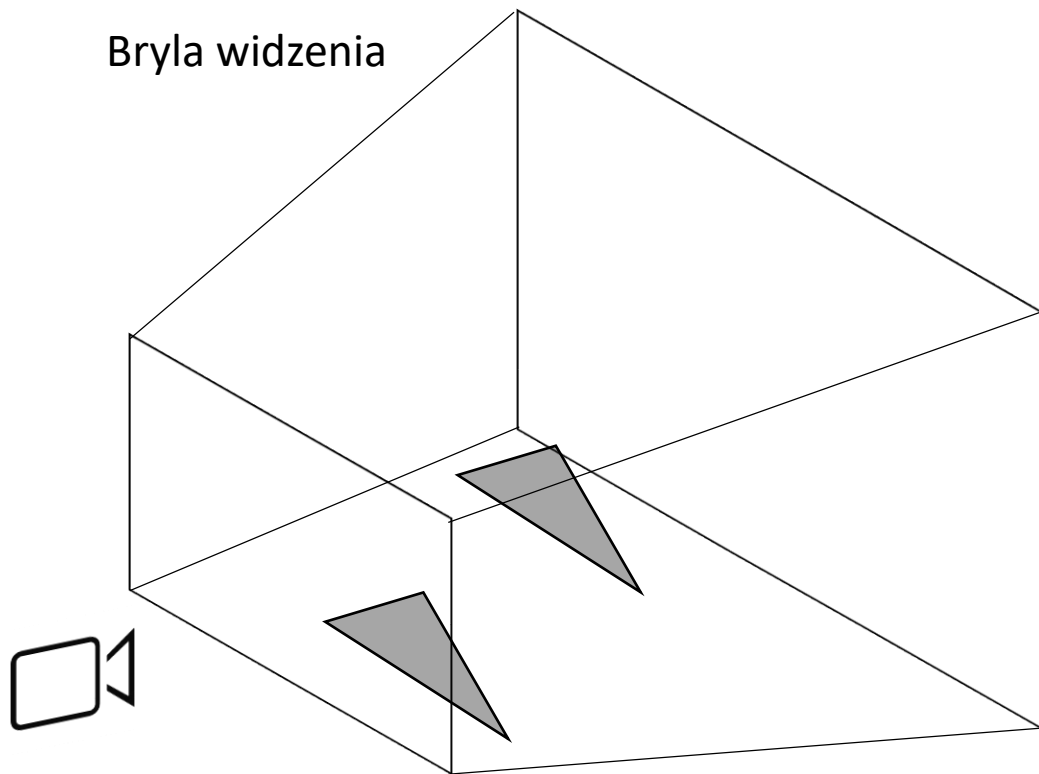


Ortograficzna bryła widzenia

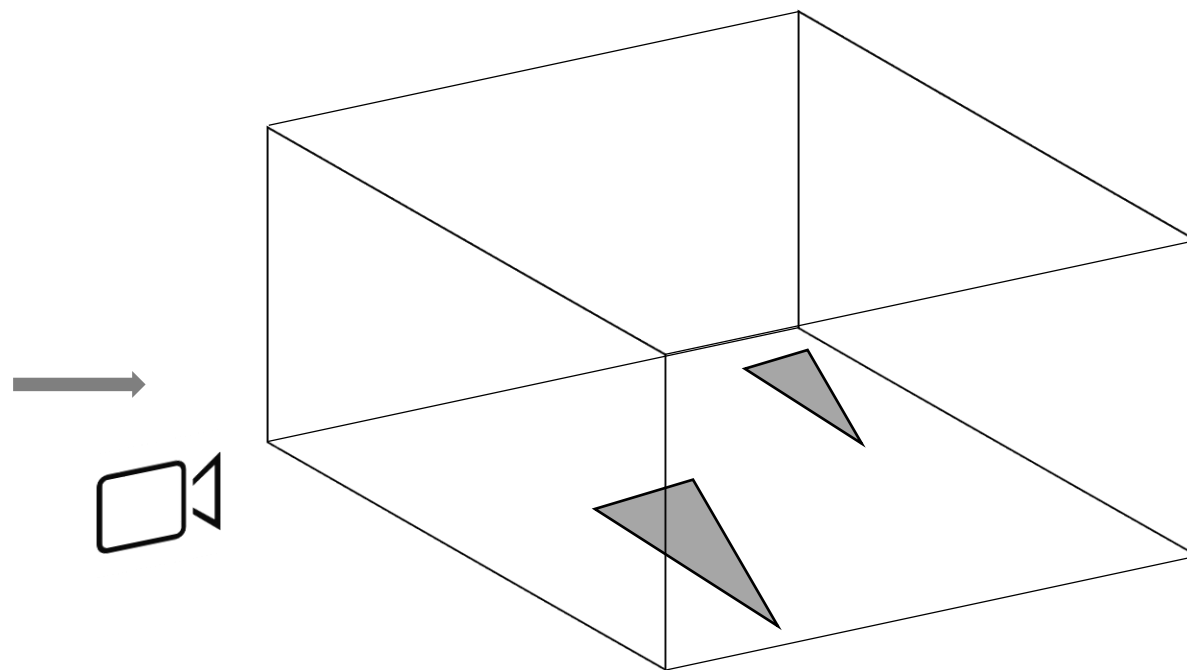


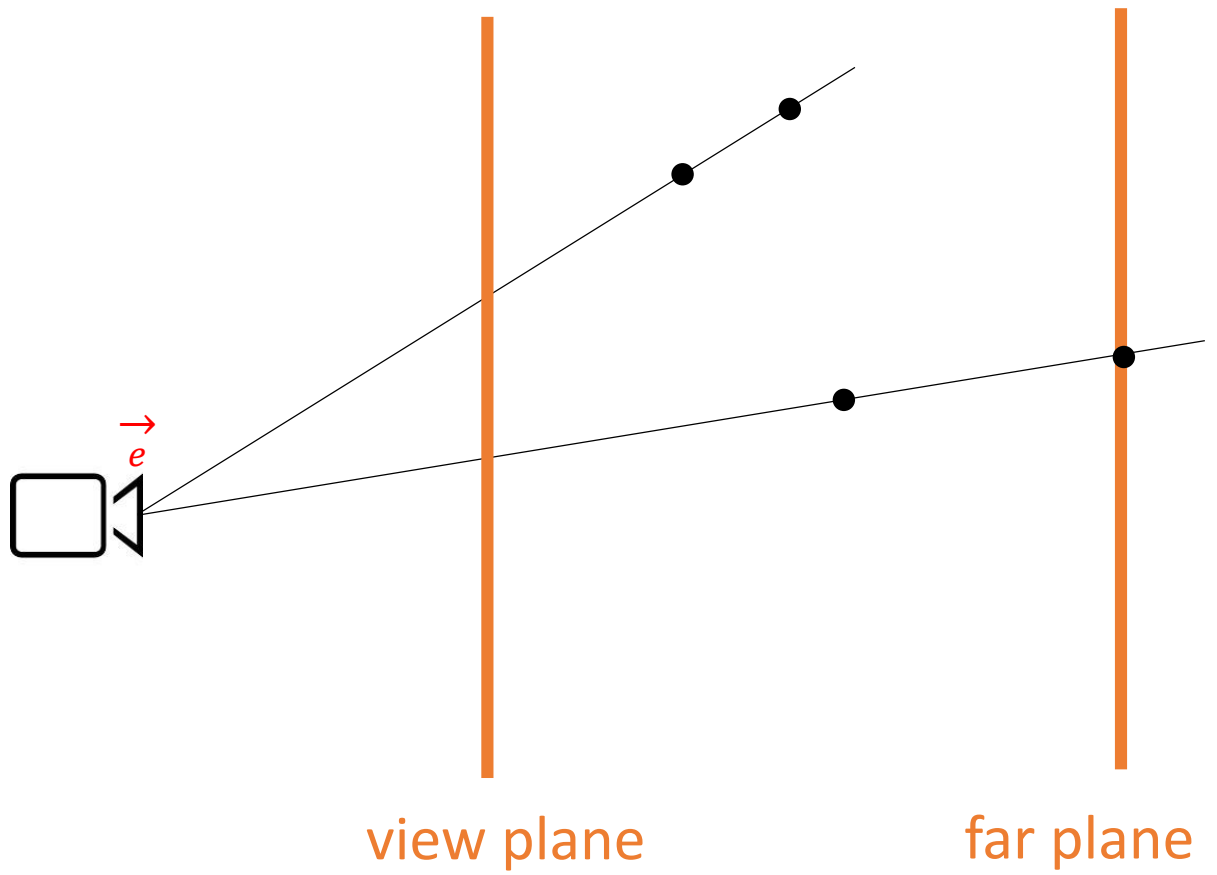
Transformacja bryły widzenia

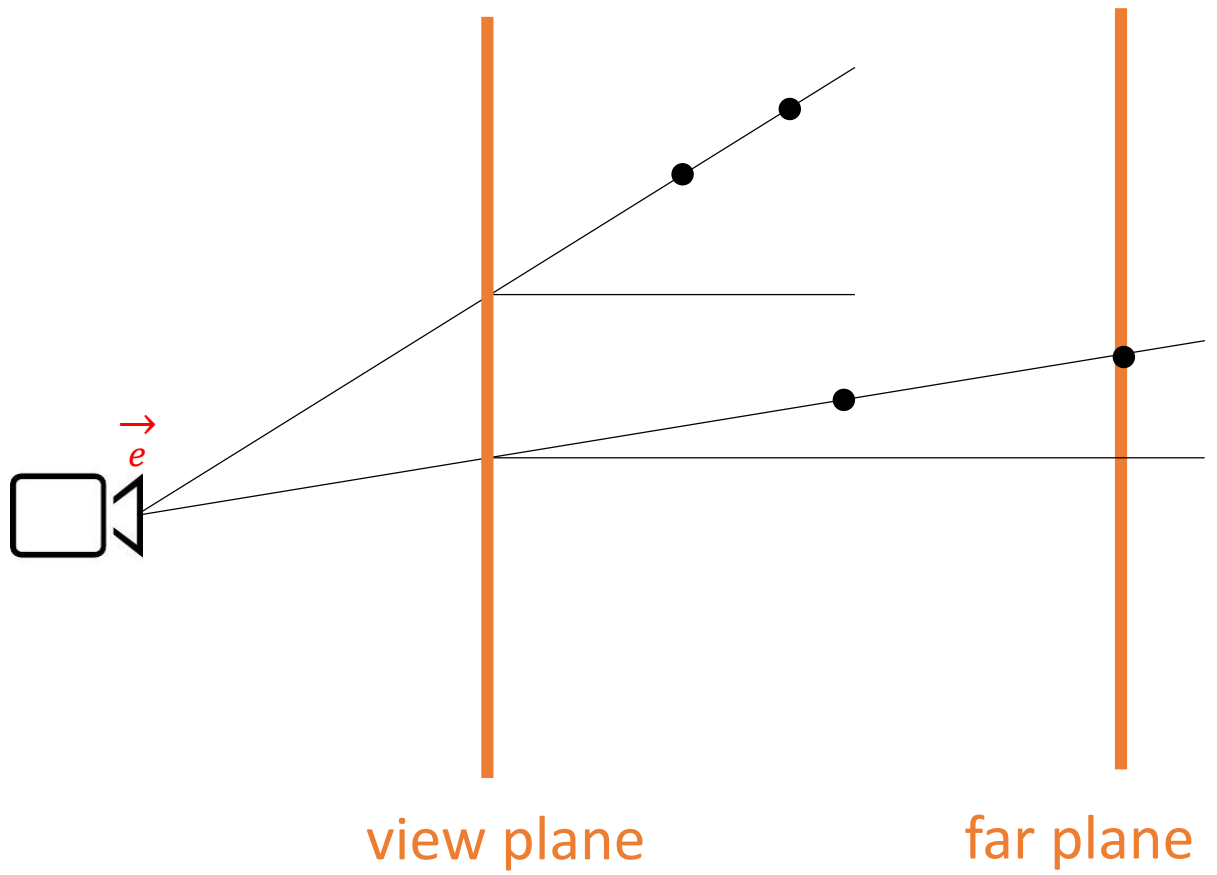
Bryła widzenia

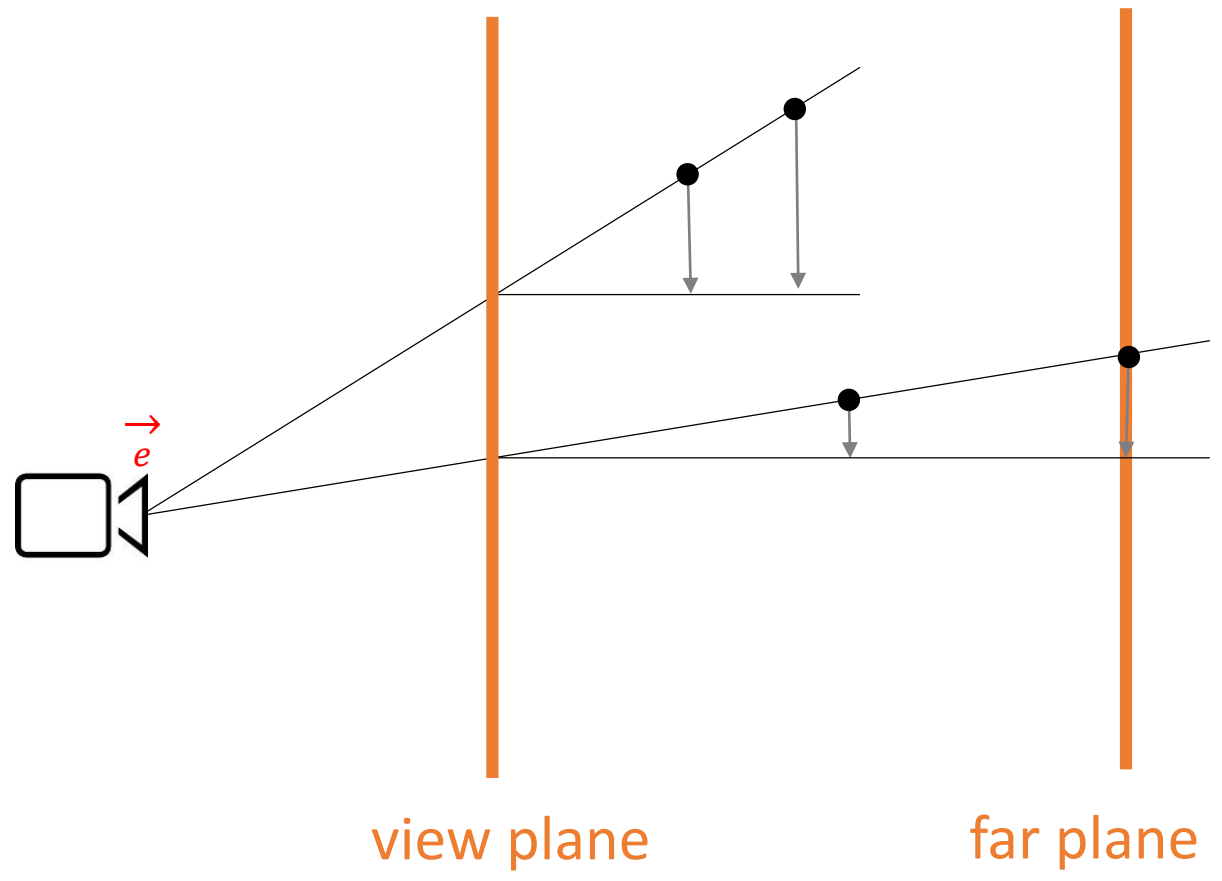


Ortograficzna bryła widzenia

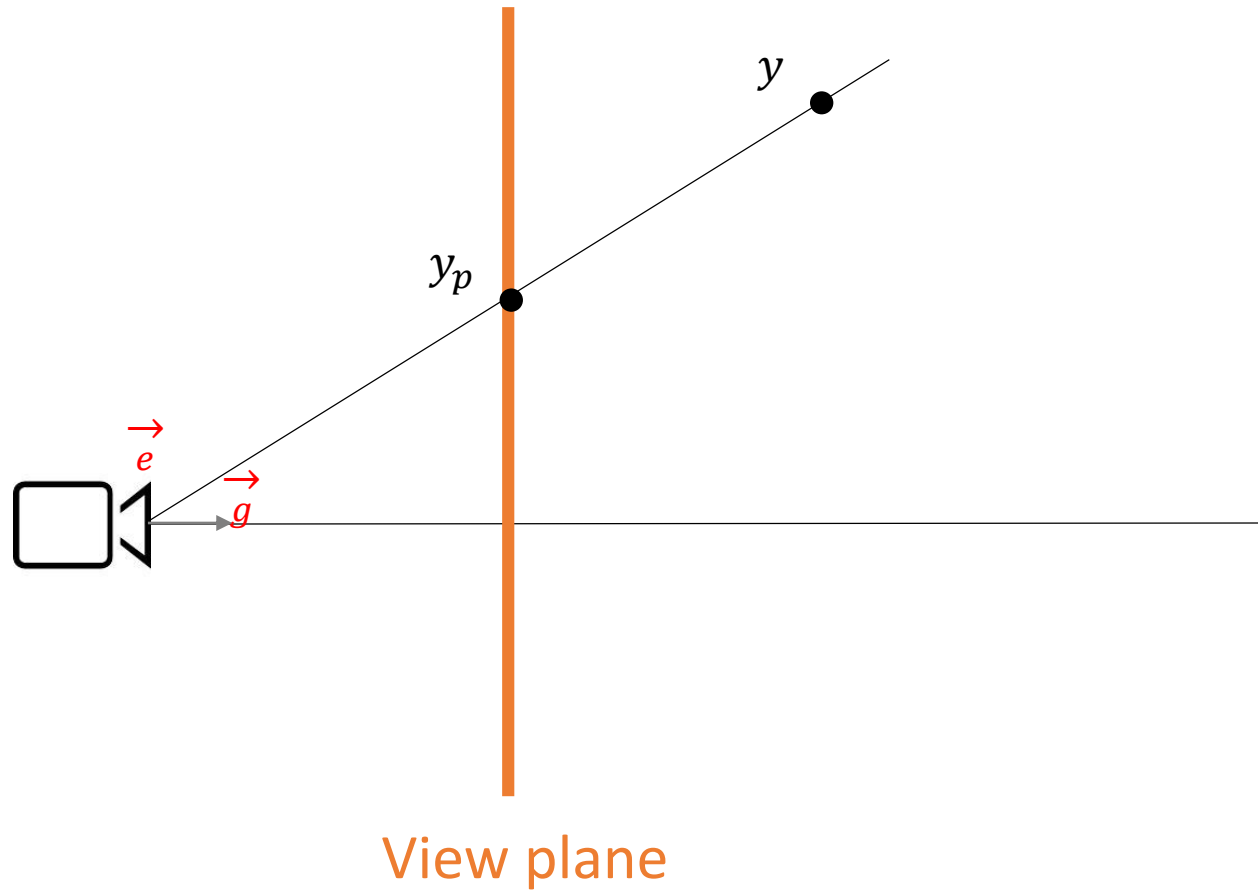




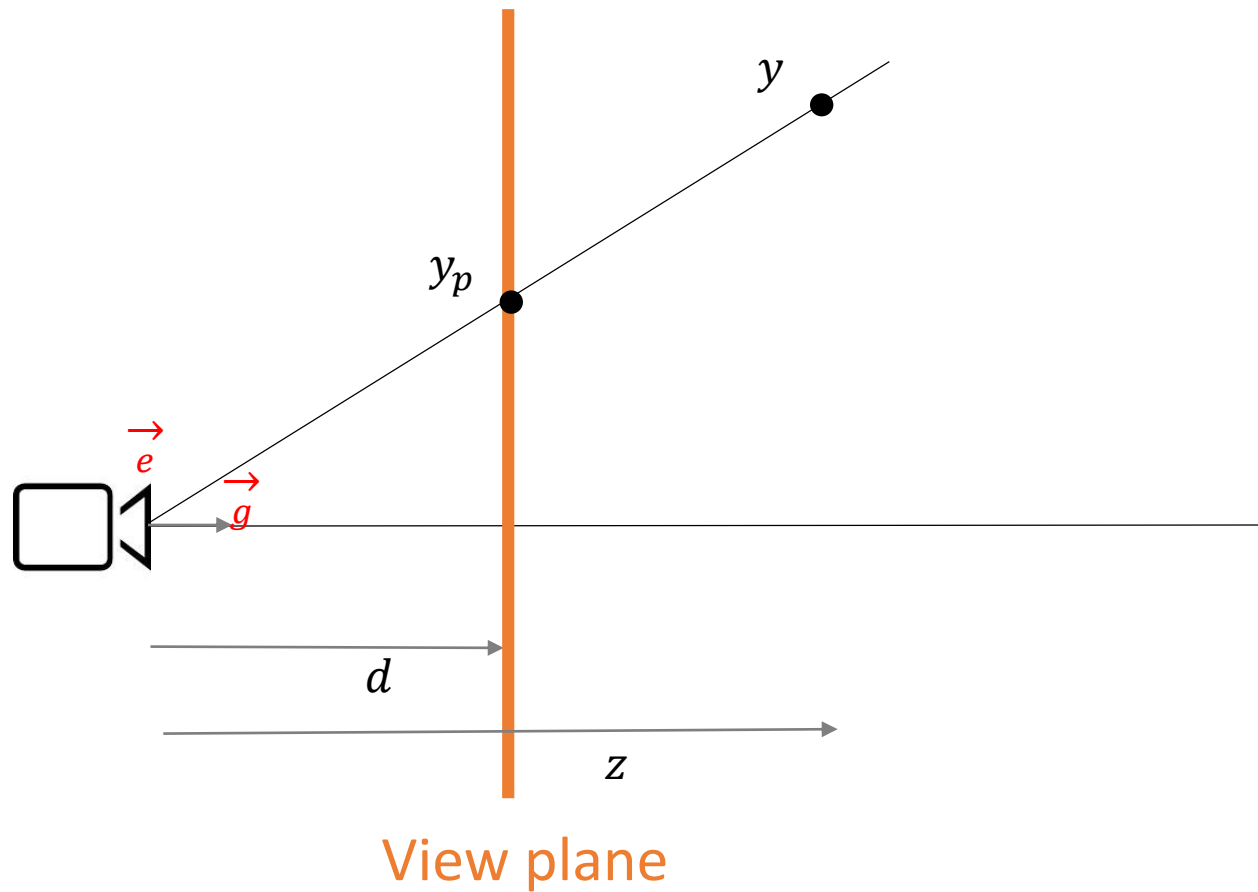




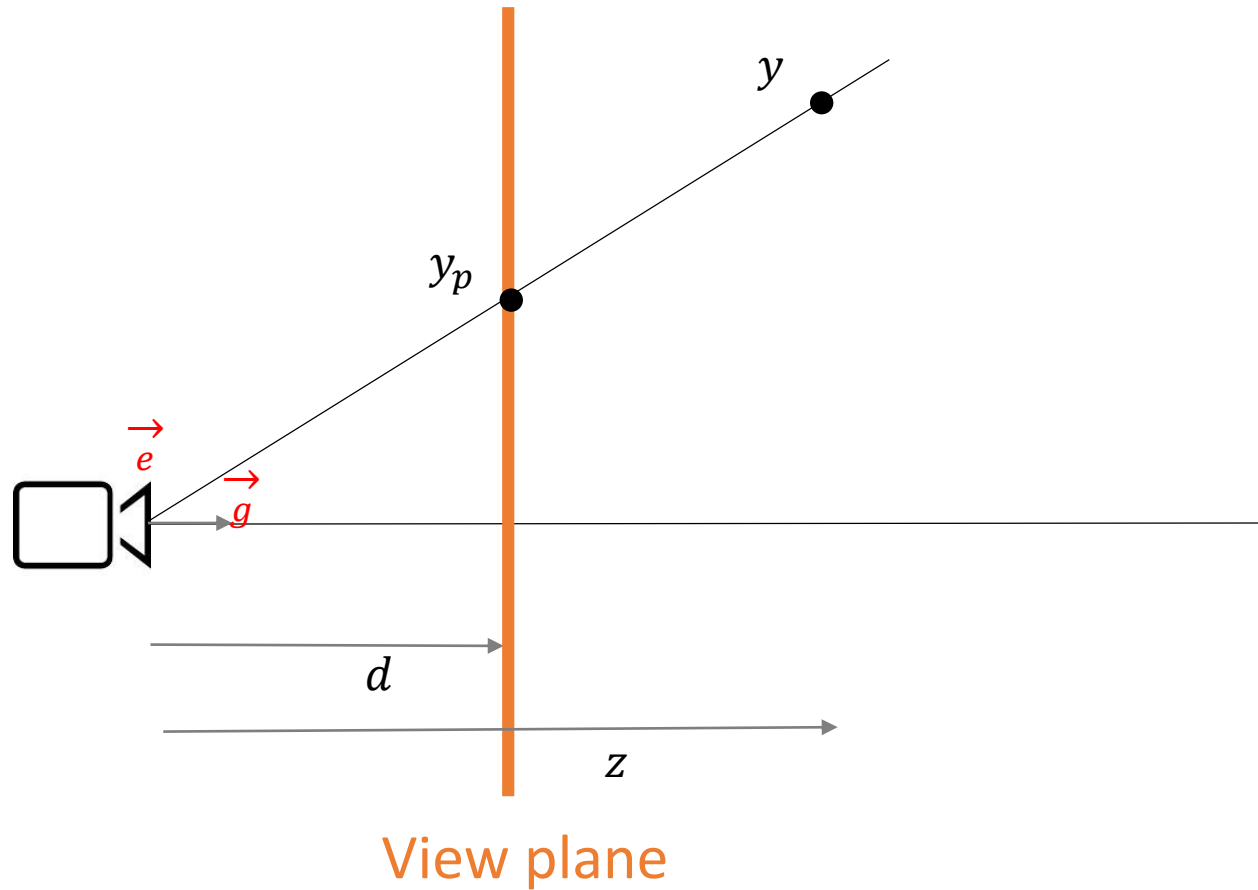
Rzutowanie na płaszczyznę



Rzutowanie na płaszczyznę

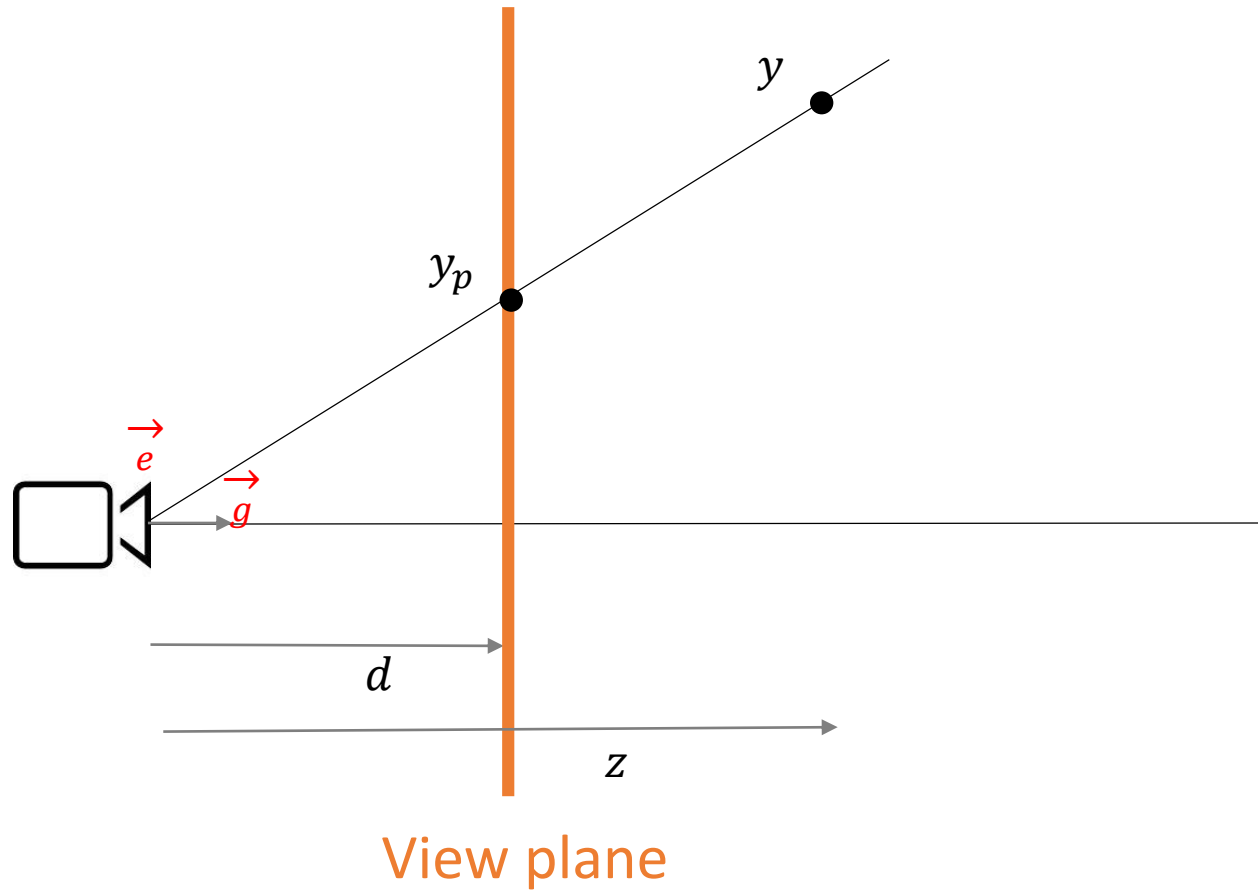


Rzutowanie na płaszczyznę



$$\frac{y_p}{y} = \frac{d}{z} \text{ czyli}$$

Rzutowanie na płaszczyznę



$$\frac{y_p}{y} = \frac{d}{z} \text{ czyli}$$

$$y_p = \frac{d}{z} y$$

Założenia

- Przyjmujemy ze:
 - Patrzymy w kierunku negatywnej osi z
 - Rzutujemy na powierzchnie bliską (near plane)
- Czyli dystans $d = -n$, co znaczy:
 - $x_p = \frac{d}{-z} x$
 - $y_p = \frac{d}{-z} y$

Założenia

- Przyjmujemy ze:
 - Patrzymy w kierunku negatywnej osi z
 - Rzutujemy na powierzchnie bliską (near plane)

- Czyli dystans $d = -n$, co znaczy:

- $x_p = \frac{d}{-z} x = \frac{n}{z} x$

- $y_p = \frac{d}{-z} y = \frac{n}{z} y$

Założenia

- Przyjmujemy ze:
 - Patrzymy w kierunku negatywnej osi z
 - Rzutujemy na powierzchnie bliską (near plane)
- Czyli dystans $d = -n$, co znaczy:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_p &= \frac{d}{-z} x = \frac{n}{z} x \\ \bullet \quad y_p &= \frac{d}{-z} y = \frac{n}{z} y \end{aligned}$$

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ \frac{z}{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

System współrzędnych jednorodnych

Nasze multiplikacje macierzami to liniowe transformacje, tzn. tylko mogą wygenerować wartości jak np.:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z$$

System współrzędnych jednorodnych

Nasze multiplikacje macierzami to liniowe transformacje, tzn. tylko mogą wygenerować wartości jak np.:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z$$

Wprowadzenie współrzędnych jednorodnych umożliwia reprezentację punktów (x, y, z) jako $(x, y, z, 1)$ i umożliwia nam skorzystanie z afinicznych transformacji, np.:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1$$

System współrzędnych jednorodnych

- We współrzędnych jednorodnych wektor

$(x, y, z, 1)$ reprezentuje punkt **(x, y, z)**

Teraz wprowadzamy możliwość reprezentacji punktów za pomocą

(x, y, z, w) co daje nam punkt **$(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w})$**

jednorodny

kartezjański

System współrzędnych jednorodnych

- Wtedy transformacja macierzowa staje się:

$$\bullet \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & T_x \\ a_2 & b_2 & c_2 & T_y \\ a_3 & b_3 & c_3 & T_z \\ a_4 & b_4 & c_4 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix}$$

System współrzędnych jednorodnych

- Wtedy transformacja macierzowa staje się:

$$\bullet \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & T_x \\ a_2 & b_2 & c_2 & T_y \\ a_3 & b_3 & c_3 & T_z \\ a_4 & b_4 & c_4 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{homogenizacja}}$$

System współrzędnych jednorodnych

- Wtedy transformacja macierzowa staje się:

$$\bullet \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & T_x \\ a_2 & b_2 & c_2 & T_y \\ a_3 & b_3 & c_3 & T_z \\ a_4 & b_4 & c_4 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{homogenizacja}}$$

System współrzędnych jednorodnych

- Wtedy transformacja macierzowa staje się:

$$\bullet \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & T_x \\ a_2 & b_2 & c_2 & T_y \\ a_3 & b_3 & c_3 & T_z \\ a_4 & b_4 & c_4 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{homogenizacja}} \begin{bmatrix} \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_2x + b_2y + c_2z + T_y}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_3x + b_3y + c_3z + T_z}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ 1 \end{bmatrix}$$

System współrzędnych jednorodnych

- Wtedy transformacja macierzowa staje się:

$$\bullet \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & T_x \\ a_2 & b_2 & c_2 & T_y \\ a_3 & b_3 & c_3 & T_z \\ a_4 & b_4 & c_4 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + T_x \\ a_2x + b_2y + c_2z + T_y \\ a_3x + b_3y + c_3z + T_z \\ a_4x + b_4y + c_4z + w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{homogenizacja}} \begin{bmatrix} \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_2x + b_2y + c_2z + T_y}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_3x + b_3y + c_3z + T_z}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Układ współrzędnych jednorodnych

Układ współrzędnych kartezjańskich

System współrzędnych jednorodnych

- Wprowadzenie transformacji rzutowania (homografia) umożliwia nam stworzyć wartości jak np.:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w}$$

System współrzędnych jednorodnych

- Wprowadzenie transformacji rzutowania (homografia) umożliwia nam stworzyć wartości jak np.:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w}$$

$$\begin{bmatrix} nx \\ \hline z \\ ny \\ \hline z \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformacja bryły widzenia

Kalkulacja:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_2x + b_2y + c_2z + T_y}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_3x + b_3y + c_3z + T_z}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cel:

$$\begin{bmatrix} nx \\ \frac{z}{ny} \\ \frac{z}{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformacja bryły widzenia

Kalkulacja:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_2x + b_2y + c_2z + T_y}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_3x + b_3y + c_3z + T_z}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cel:

$$\begin{bmatrix} nx \\ \frac{z}{ny} \\ \frac{z}{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Czwarty wiersz

Transformacja bryły widzenia

Kalkulacja:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_2x + b_2y + c_2z + T_y}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_3x + b_3y + c_3z + T_z}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cel:

$$\begin{bmatrix} nx \\ \frac{z}{ny} \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Czwarty wiersz

Transformacja bryły widzenia

Kalkulacja:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_2x + b_2y + c_2z + T_y}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_3x + b_3y + c_3z + T_z}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cel:

$$\begin{bmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ \frac{z}{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Czwarty wiersz

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pierwszy i drugi wiersz

Transformacja bryły widzenia

Kalkulacja:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1x + b_1y + c_1z + T_x}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_2x + b_2y + c_2z + T_y}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ \frac{a_3x + b_3y + c_3z + T_z}{a_4x + b_4y + c_4z + w} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cel:

$$\begin{bmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Czwarty wiersz

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

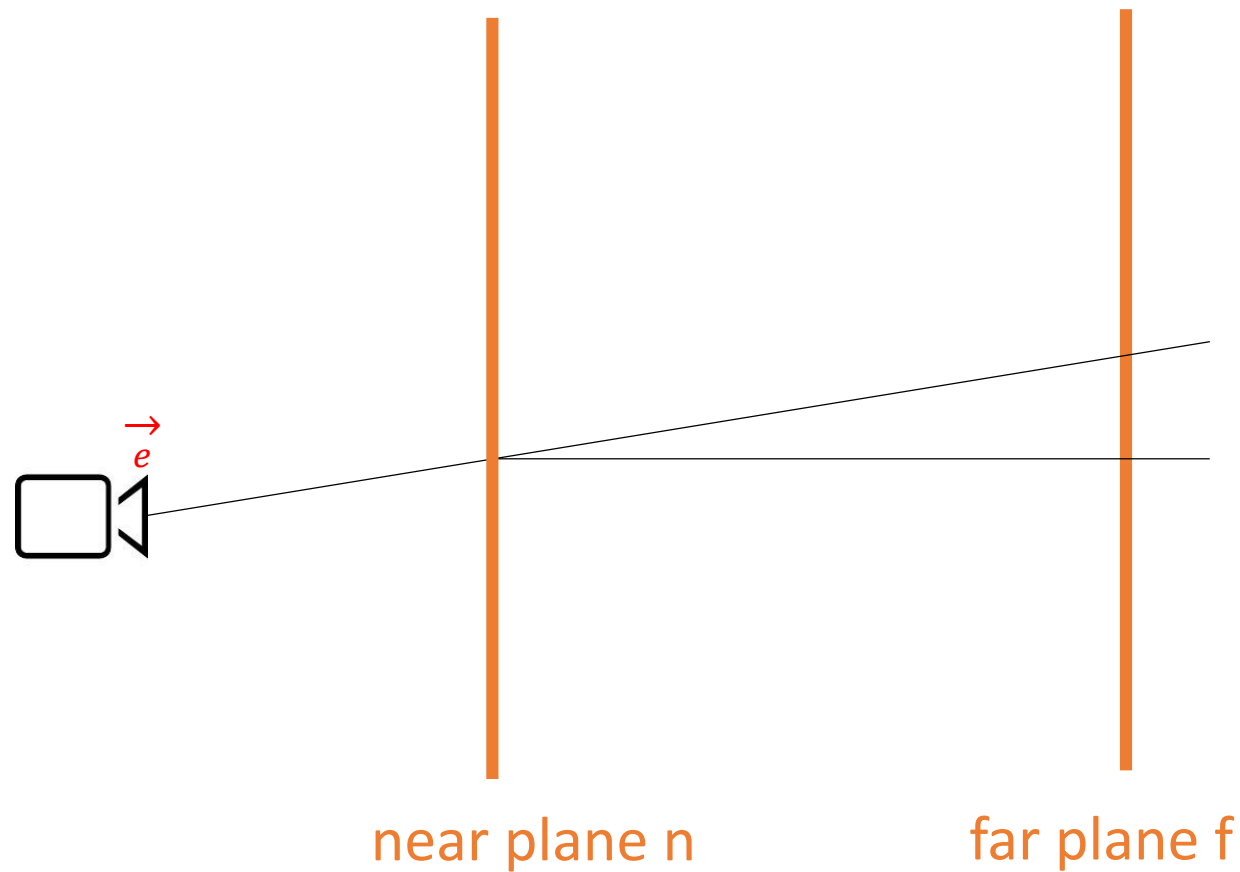
Pierwszy i drugi wiersz

Co z trzecim wierszem?

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

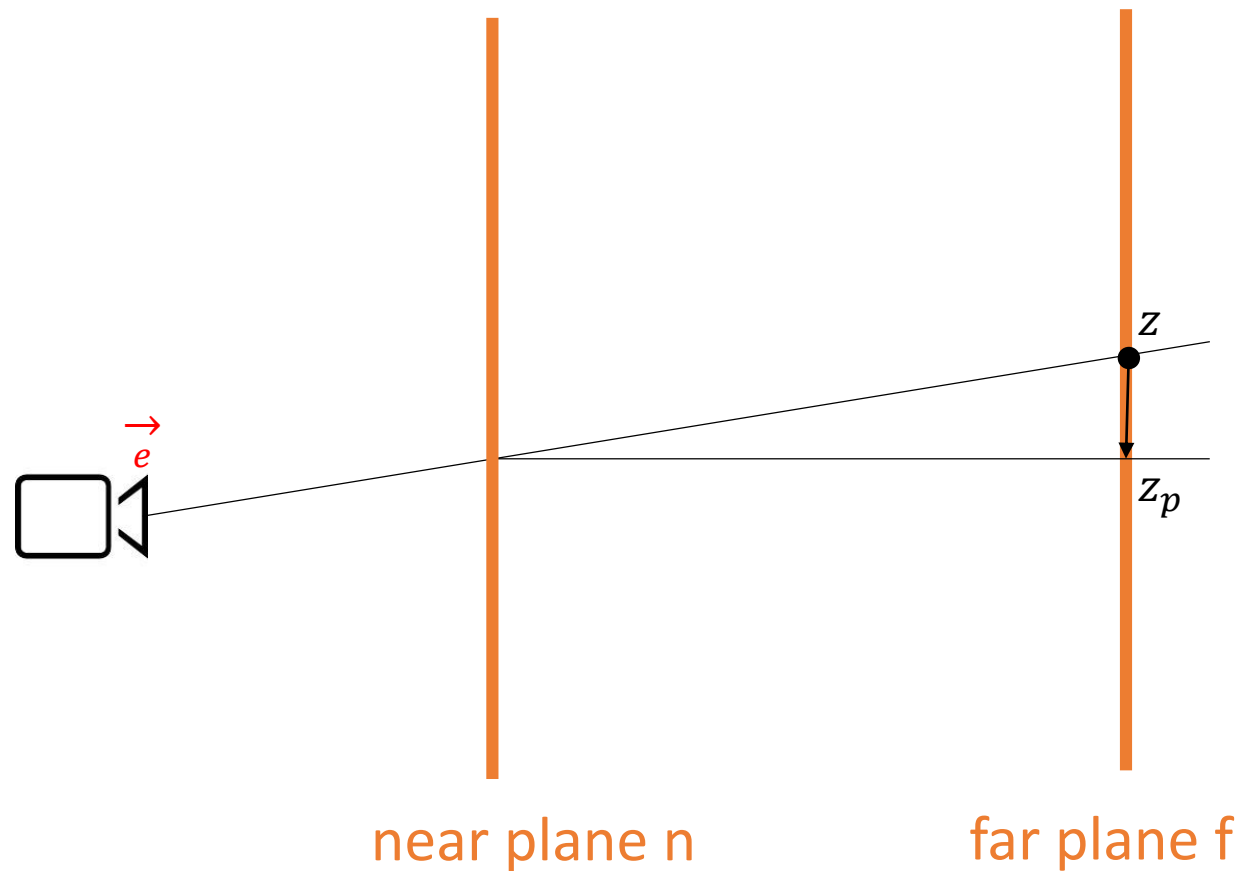
$$\begin{bmatrix} nx \\ \hline z \\ ny \\ \hline z \\ \textcolor{red}{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformacja bryły widzenia



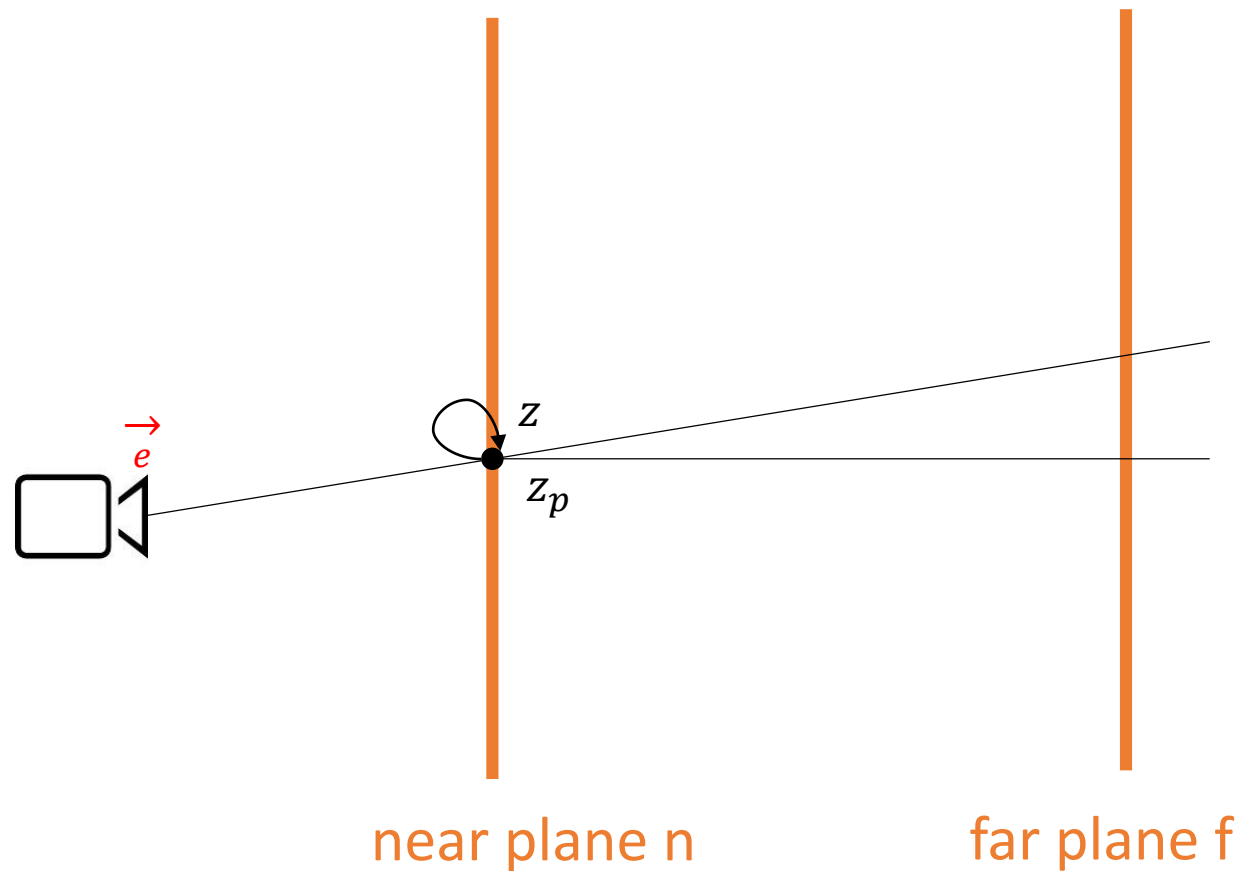
Transformacja bryły widzenia

$$z_p = f$$



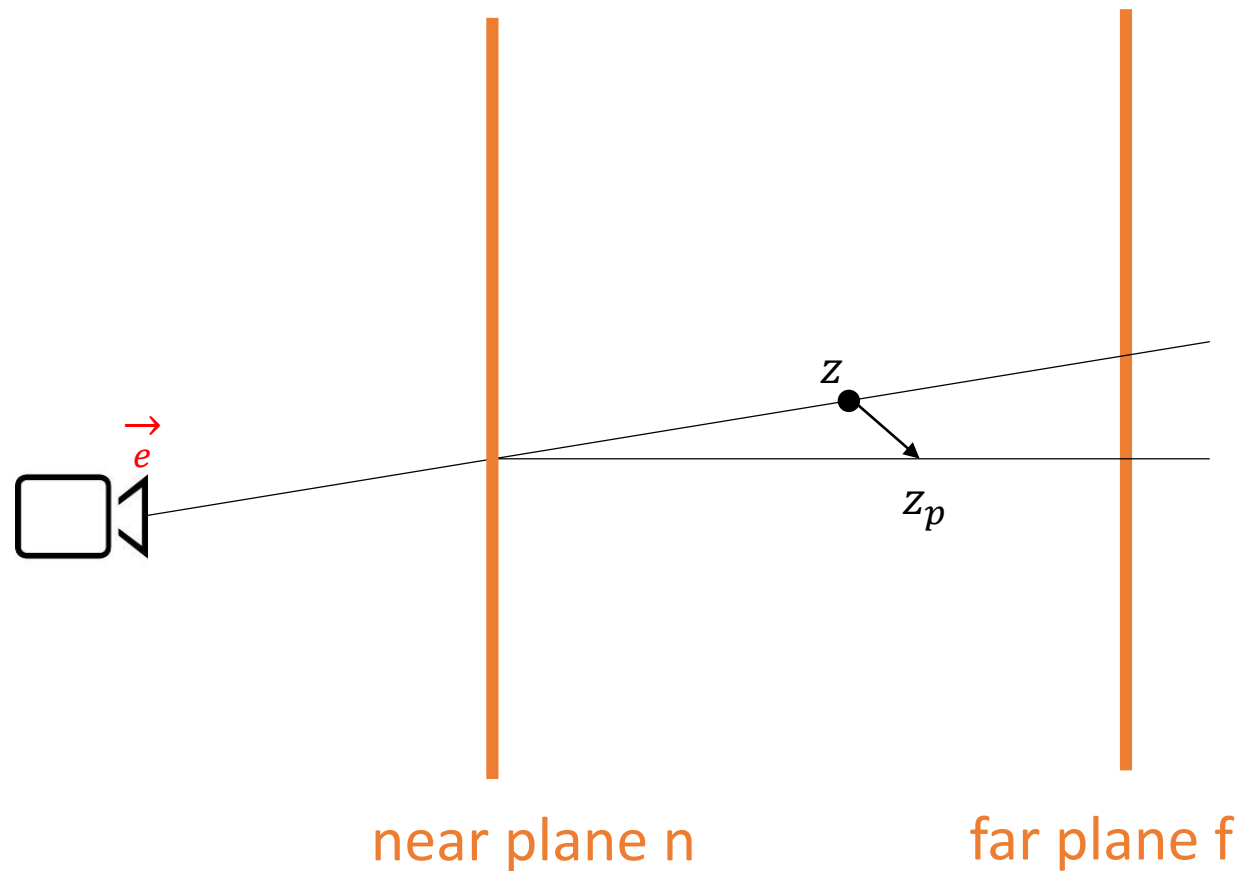
Transformacja bryły widzenia

$$z_p = n$$



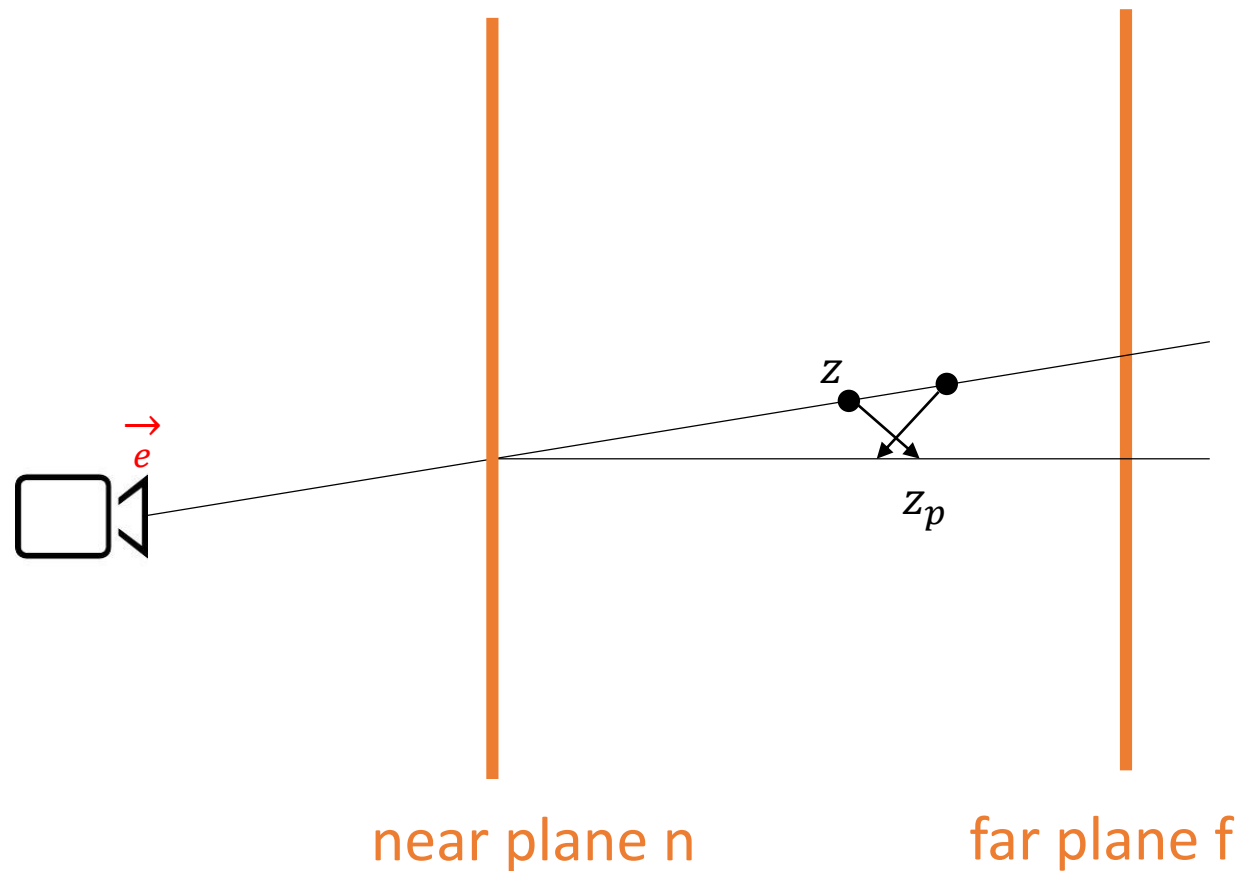
Transformacja bryły widzenia

$$z_p \in [n, f]$$



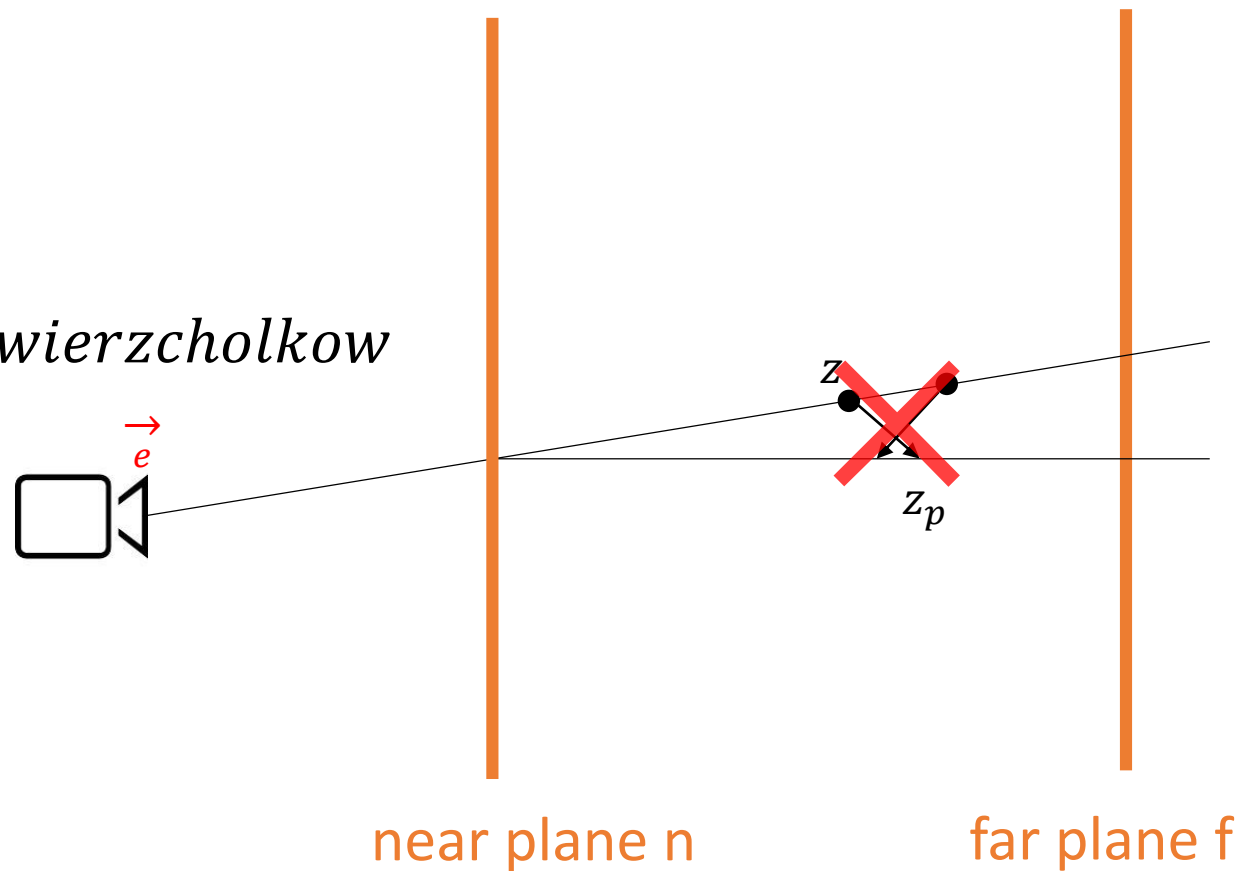
Transformacja bryły widzenia

$$z_p \in [n, f]$$



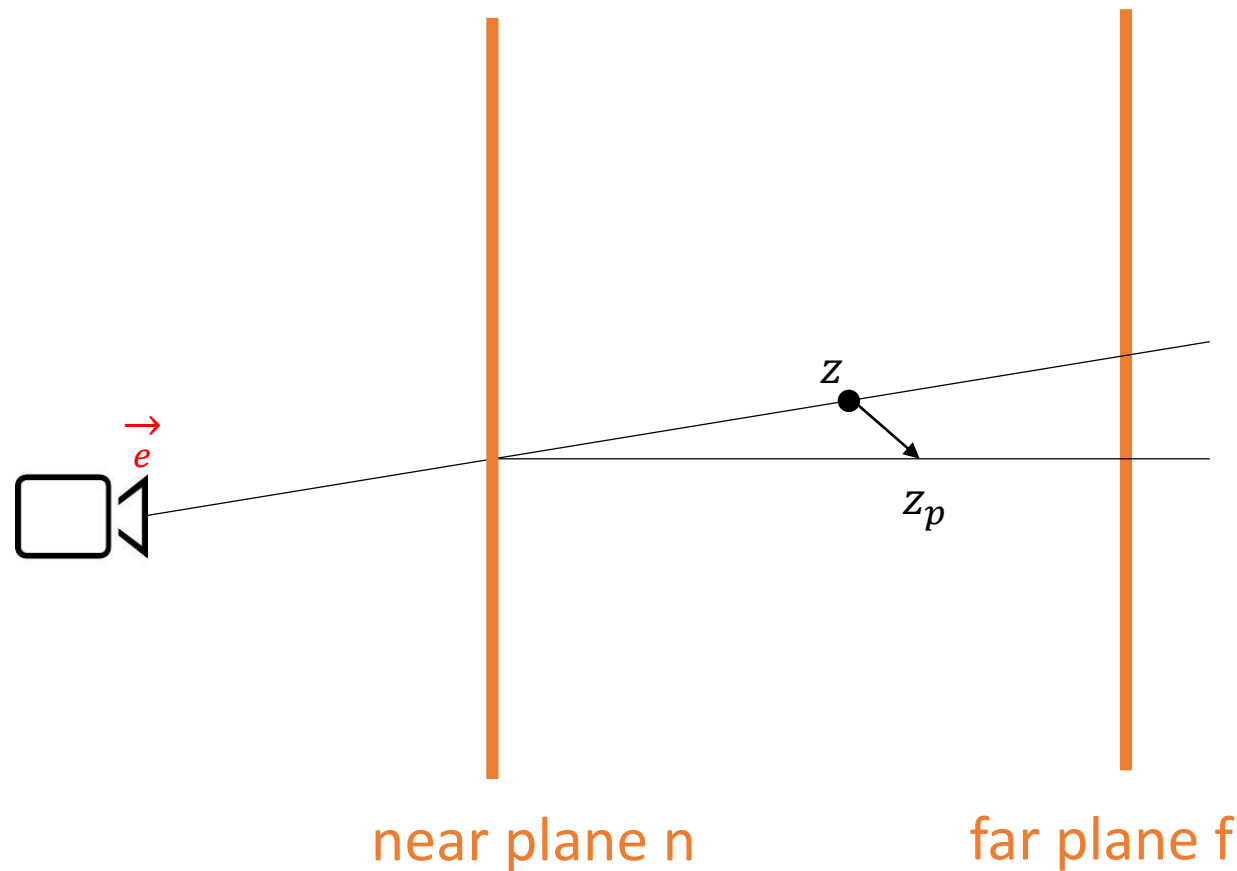
Transformacja bryły widzenia

z_p ma zachować porządek wierzchołków



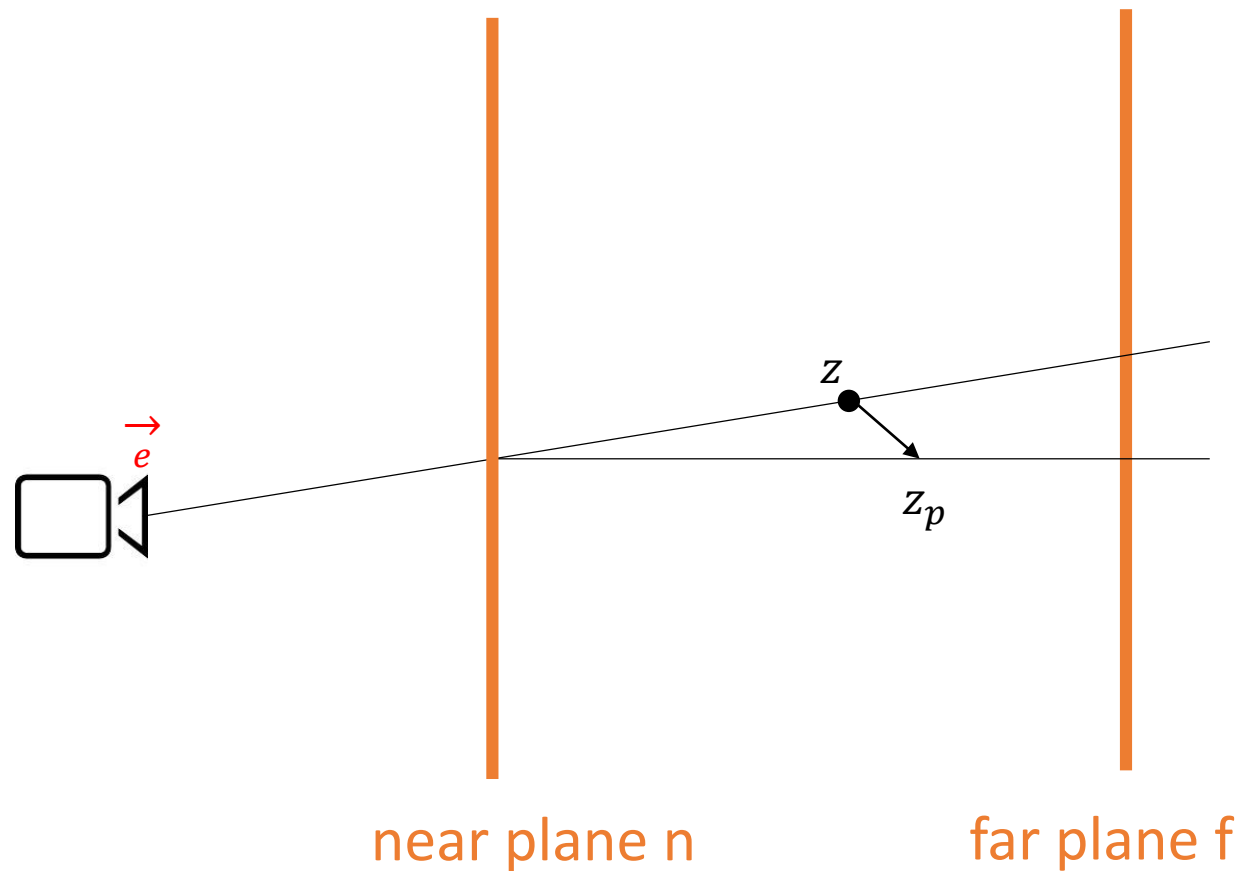
Transformacja bryły widzenia

$$z_p = \frac{nf}{z} \in [n, f]$$



Transformacja bryły widzenia

$$z_p = n + f - \frac{nf}{z}$$



Zachowanie porządku wierzchołków

- $z_p = n + f - \frac{fn}{z}$
- Porządek wzdłuż osi z jest zachowany gdy $0 > n \geq z_1 > z_2 \geq f$ to $z_{1p} > z_{2p}$

Zachowanie porządku wierzchołków

- $z_p = n + f - \frac{fn}{z}$
- Porządek wzdłuż osi z jest zachowany gdy $0 > n \geq z_1 > z_2 \geq f$ to $z_{1p} > z_{2p}$
- $z_{1p} - z_{2p} = \frac{fn}{z_2} - \frac{fn}{z_1}$

Zachowanie porządku wierzchołków

- $z_p = n + f - \frac{fn}{z}$
- Porządek wzdłuż osi z jest zachowany gdy $0 > n \geq z_1 > z_2 \geq f$ to $z_{1p} > z_{2p}$
- $z_{1p} - z_{2p} = \frac{fn}{z_2} - \frac{fn}{z_1} = \frac{(z_1 - z_2)fn}{z_1 z_2}$

Zachowanie porządku wierzchołków

- $z_p = n + f - \frac{fn}{z}$
- Porządek wzdłuż osi z jest zachowany gdy $0 > n \geq z_1 > z_2 \geq f$ to $z_{1p} > z_{2p}$
- $z_{1p} - z_{2p} = \frac{fn}{z_2} - \frac{fn}{z_1} = \frac{(z_1 - z_2)fn}{z_1 z_2}$
- Bo $f, z_1, z_2, n < 0$ mamy $\frac{fn}{z_1 z_2} > 0$ i bo $z_1 > z_2$ mamy $z_1 - z_2 > 0$

Zachowanie porządku wierzchołków

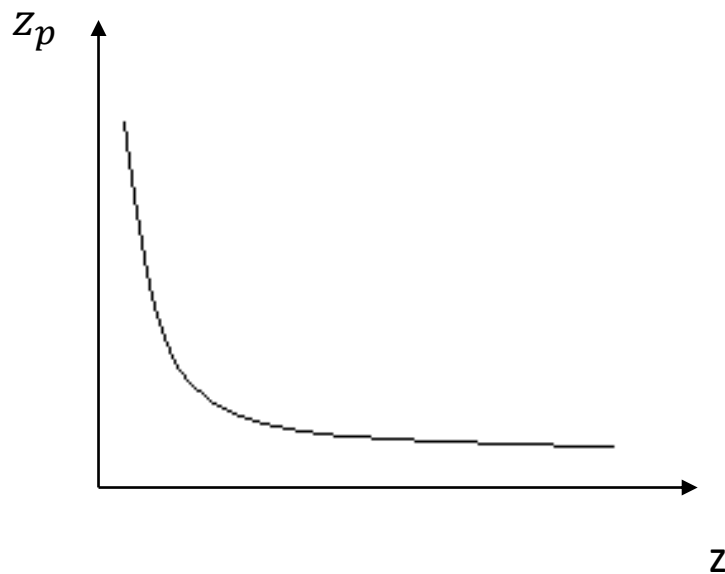
- $z_p = n + f - \frac{fn}{z}$
- Porządek wzdłuż osi z jest zachowany gdy $0 > n \geq z_1 > z_2 \geq f$ to $z_{1p} > z_{2p}$
- $$z_{1p} - z_{2p} = \frac{fn}{z_2} - \frac{fn}{z_1} = \frac{(z_1 - z_2)fn}{z_1 z_2}$$
- Bo $f, z_1, z_2, n < 0$ mamy $\frac{fn}{z_1 z_2} > 0$ i bo $z_1 > z_2$ mamy $z_1 - z_2 > 0$
- Czyli $z_{1p} > z_{2p}$

Transformacja bryły widzenia

$$z_p = n + f - \frac{fn}{z} \rightarrow z_p \sim \frac{1}{z}$$

Transformacja bryły widzenia

$$z_p = n + f - \frac{fn}{z} \rightarrow z_p \sim \frac{1}{z}$$



Macierz P

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz P

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n + f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ n + f - \frac{nf}{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Macierz transformacji perspektywicznej

- Czyli nasza końcowa macierz transformacji perspektywicznej M_{pers} jest wtedy:
- $M_{per} = M_{orth}P$

Macierz transformacji perspektywicznej

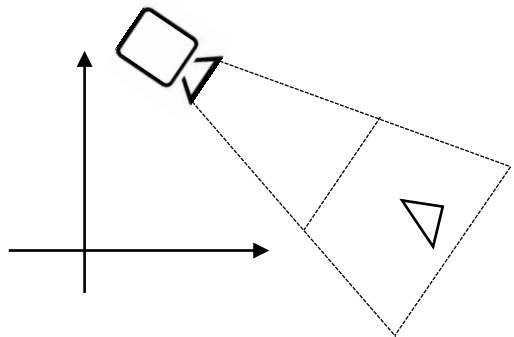
- Czyli nasza końcowa macierz transformacji perspektywicznej M_{pers} jest wtedy:

- $$M_{per} = M_{orth}P = M_{orth} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

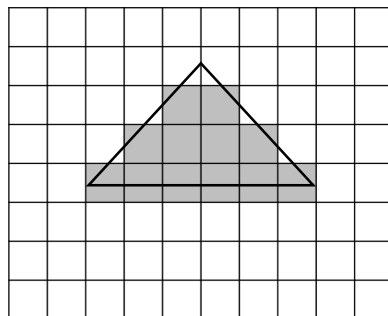
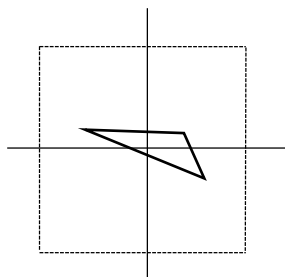
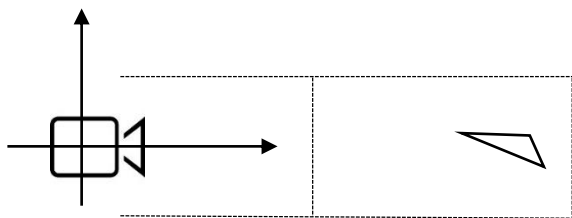
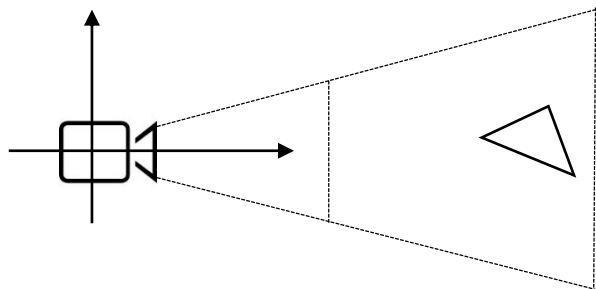
Macierz transformacji perspektywicznej

- Czyli nasza końcowa macierz transformacji perspektywicznej M_{pers} jest wtedy:

$$\bullet M_{per} = M_{orth}P = M_{orth} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{l+r}{l-r} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{b+t}{b-t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Potok graficzny



- Potok graficzny z **ortograficznym** rzutem:

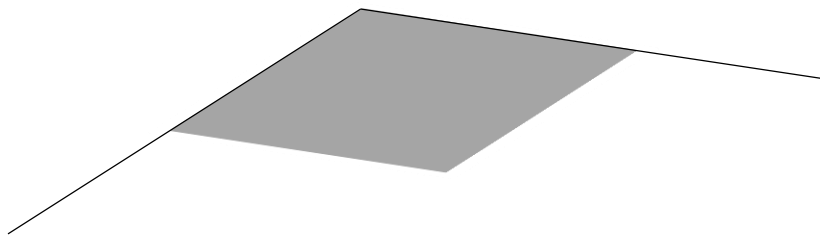
$$M_{vp} M_{ort} M_{cam} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Potok graficzny z **perspektywicznym** rzutem:

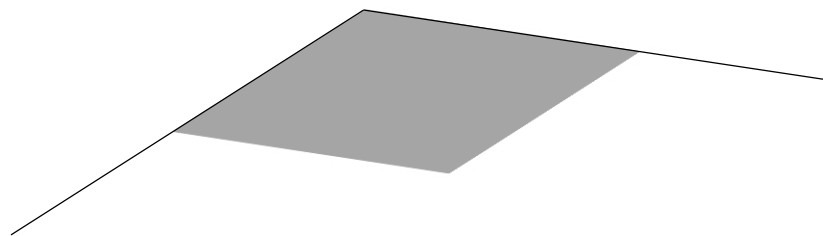
$$M_{vp} M_{per} M_{cam} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Współrzędne jednorodne

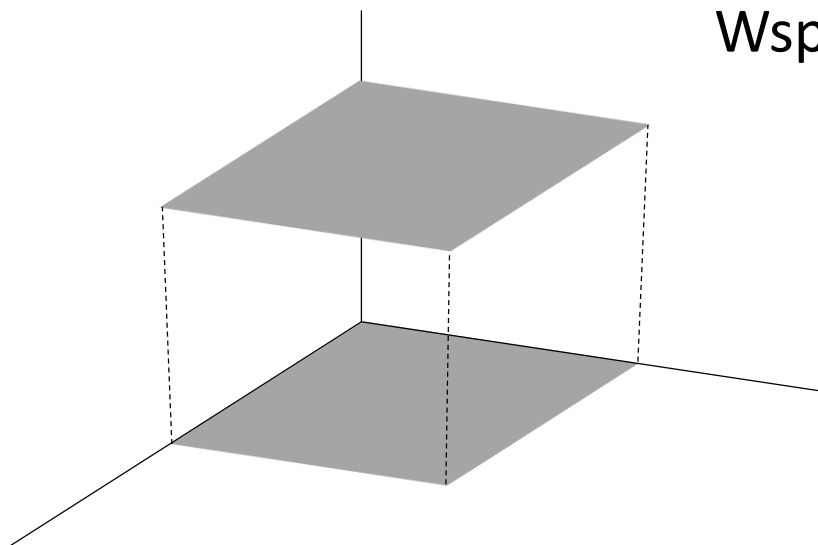
2D



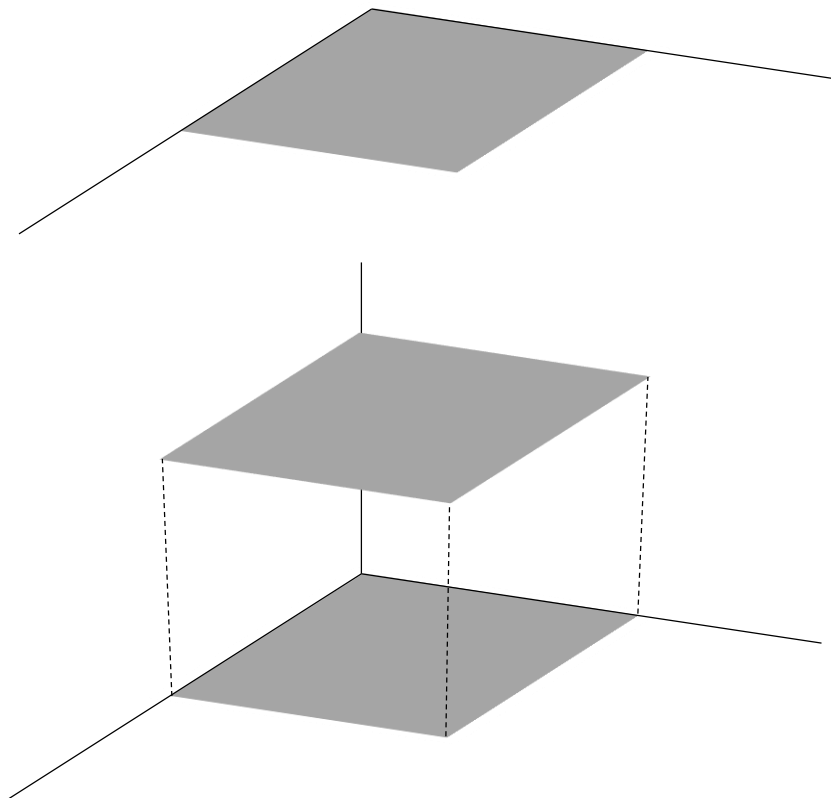
Współrzędne jednorodne



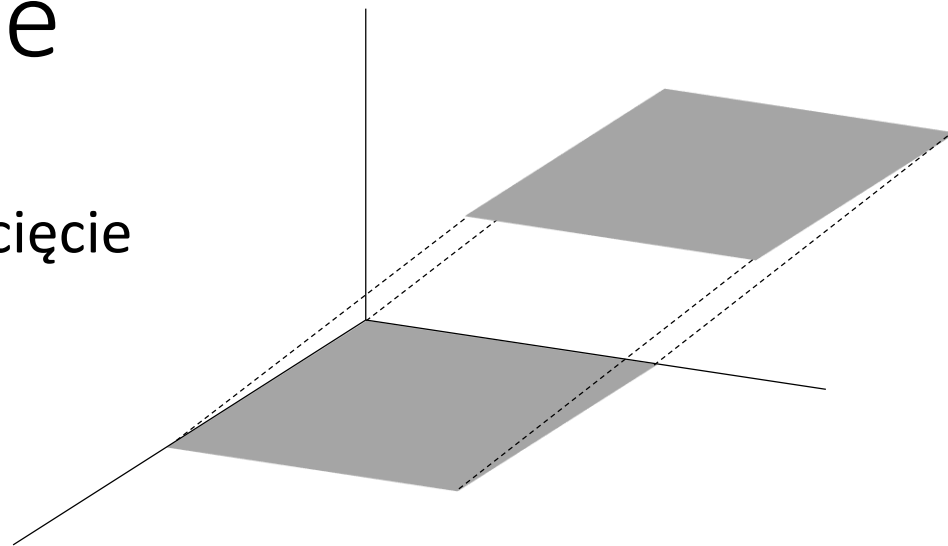
Współrzędne jednorodne 3D



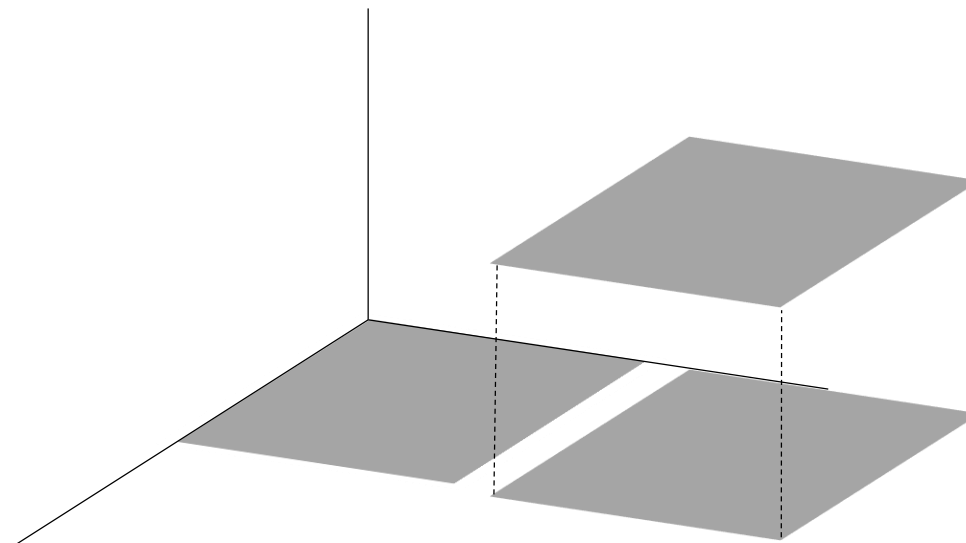
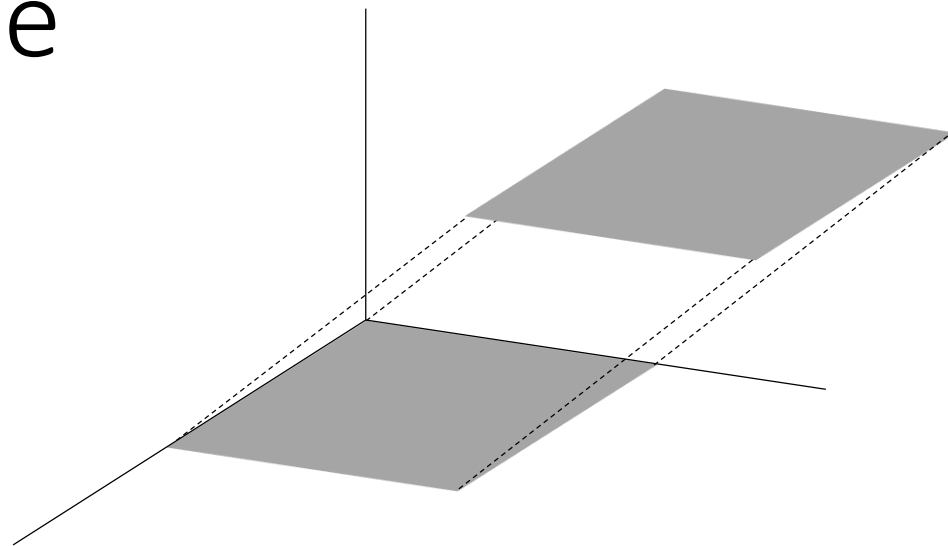
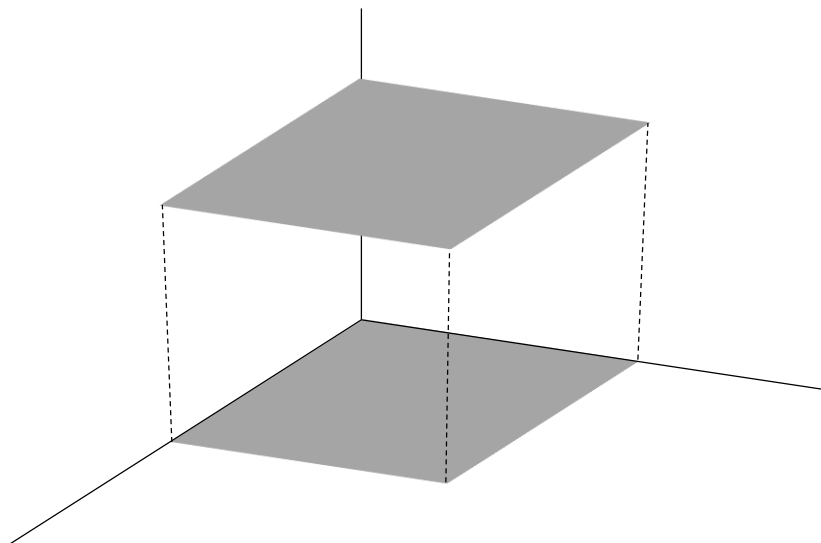
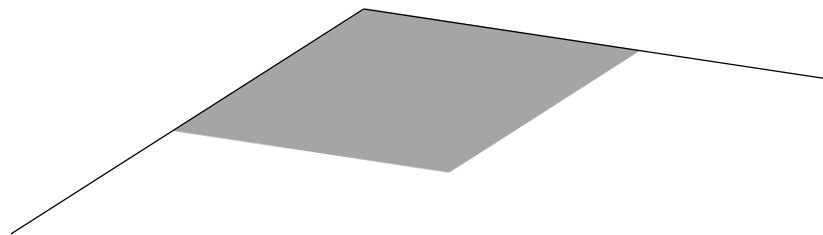
Współrzędne jednorodne



Ścięcie

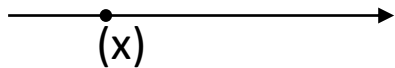


Współrzędne jednorodne

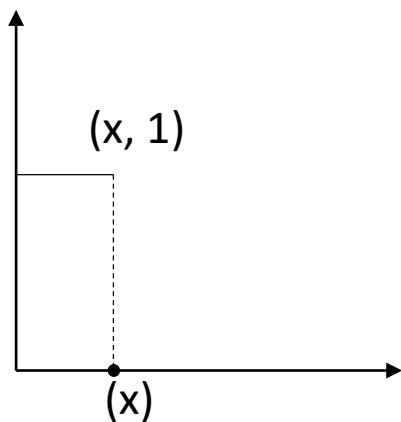


Translacja w 2D

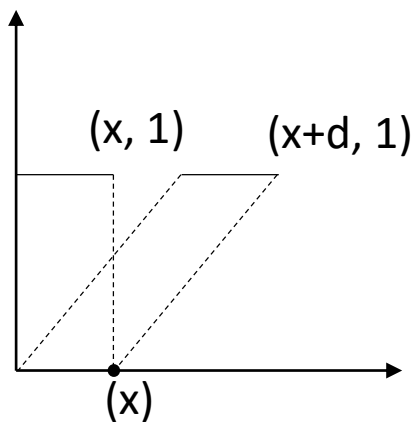
Współrzędne jednorodne 2D: $w \neq 1$



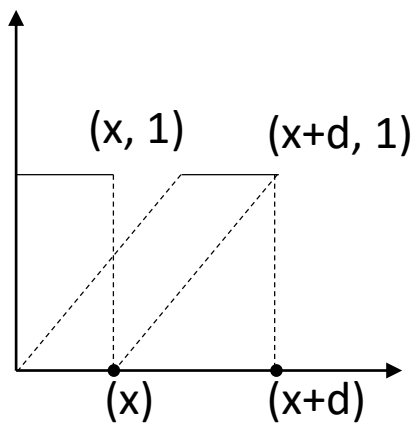
Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



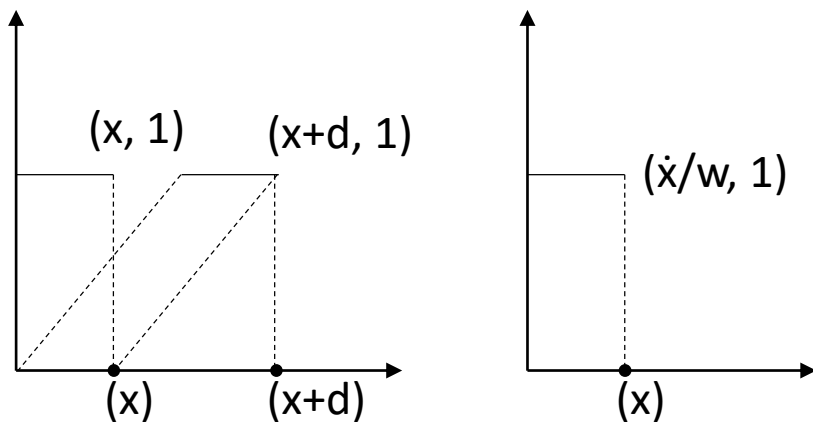
Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



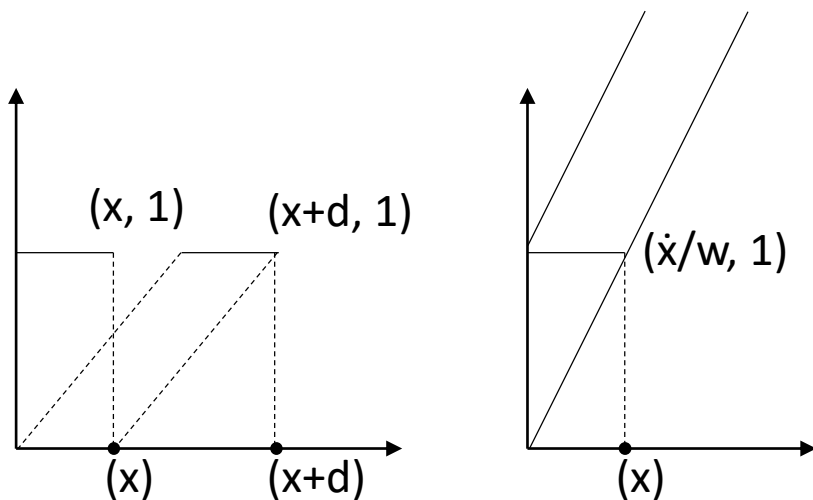
Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



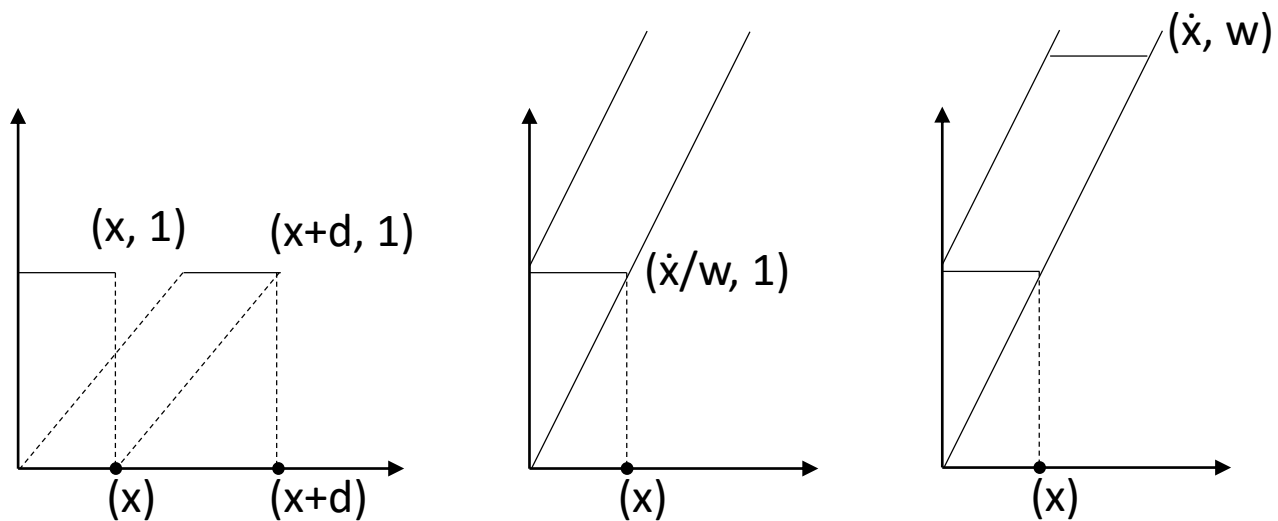
Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



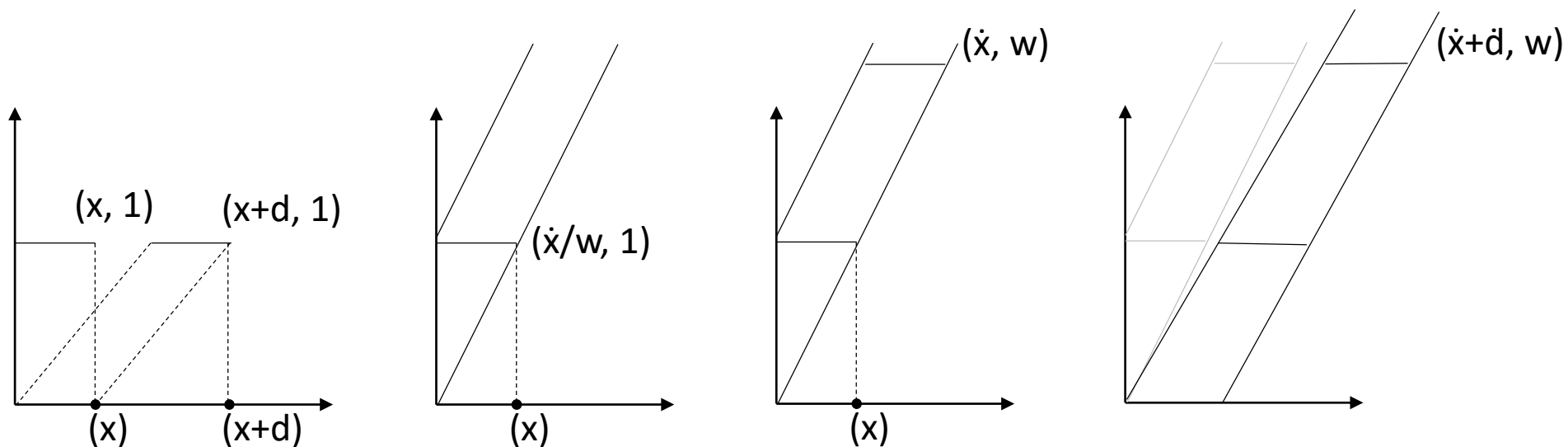
Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



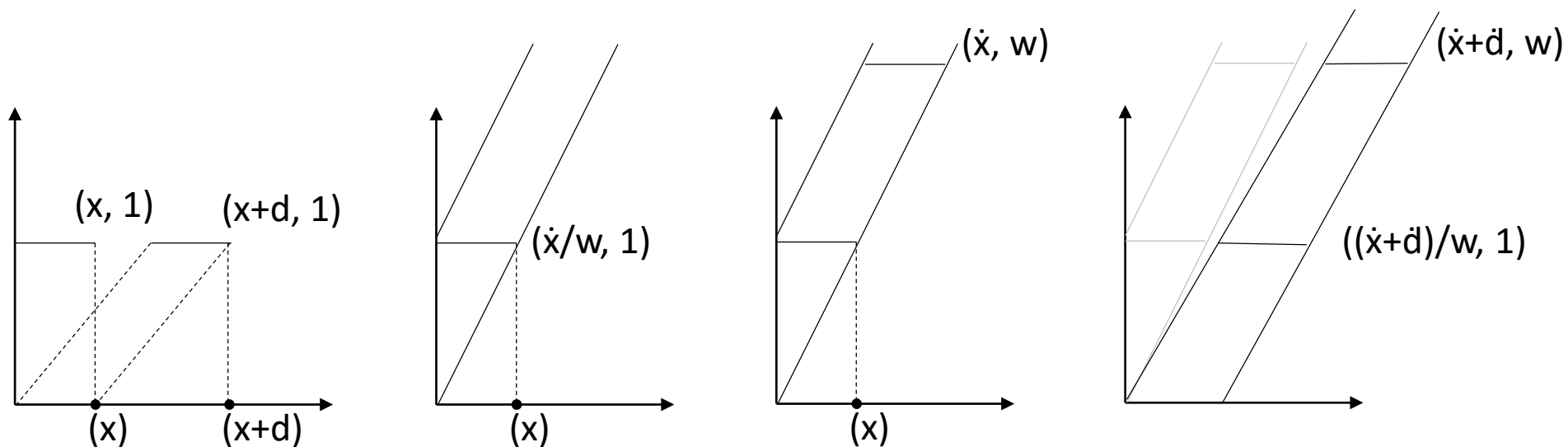
Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



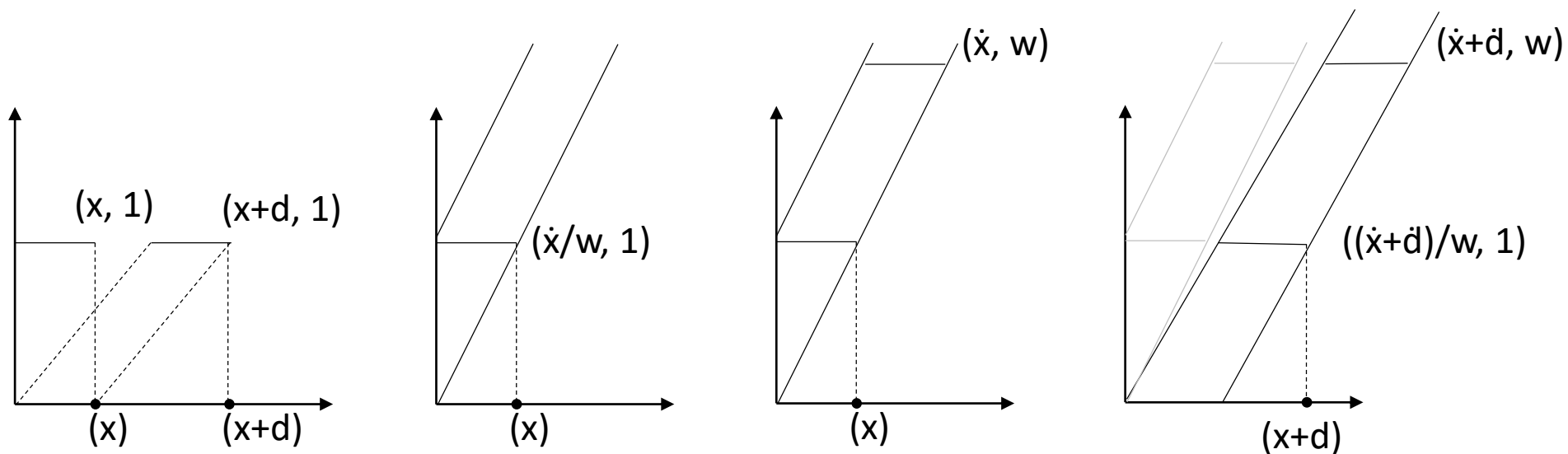
Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



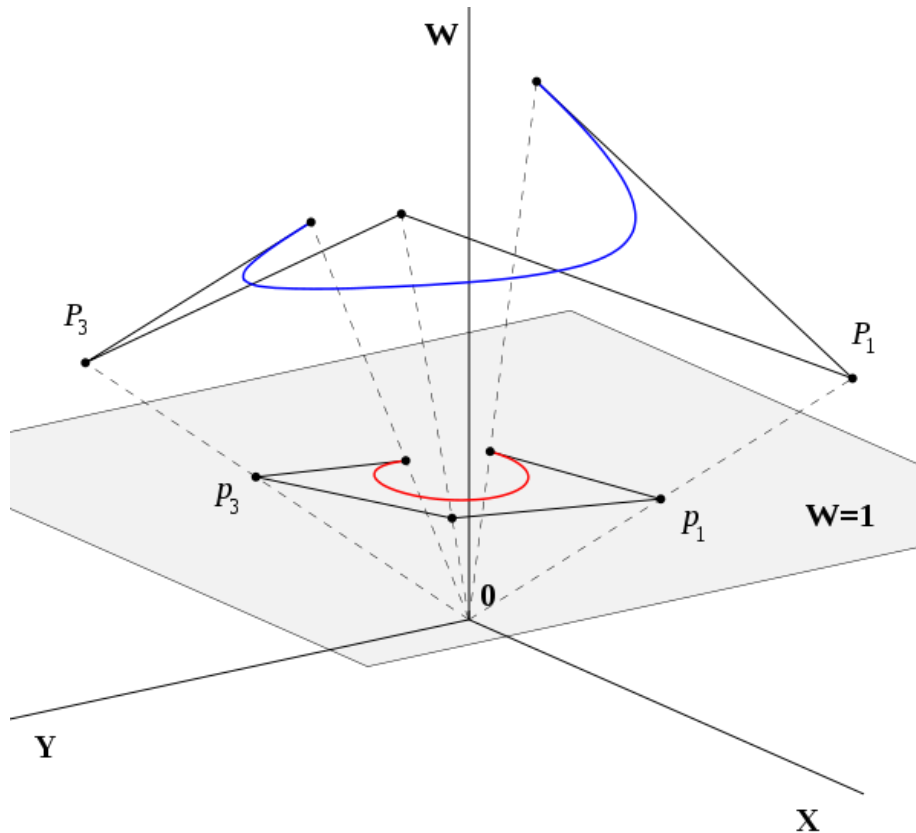
Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



Współrzędne jednorodne $w \neq 1$



August Möbius



https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_coordinates

Rysowanie na ekranie

- Żeby narysować linie na ekranie możemy się wtedy posługiwać następującym pseudokodem:

```
compute  $M_{vp}$ 
compute  $M_{per}$ 
compute  $M_{cam}$ 
 $M = M_{vp} M_{per} M_{cam}$ 

for each line segment (a, b) do
     $p = M a$ 
     $q = M b$ 
    drawline( $p_x/p_w$ ,  $p_y/p_w$ ,  $q_x/q_w$ ,  $q_y/q_w$ )
```